Quelques questions ouvertes sur le problème de la régularité en Calcul des Variations

Pierre Bousquet

1 Introduction

On considère le problème suivant :

$$(P) \quad \text{Minimiser} \quad u \mapsto \int_\Omega f(\nabla u(x))\, dx$$

associé à une condition au bord de type Dirichlet : $u_{|\partial\Omega} = \phi$. Dans toute la suite, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné lipschitzien et $\phi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction au moins $L^1(\partial\Omega)$. Les fonctions admissibles u appartiennent à $W^{1,1}(\Omega)$. La condition au bord est entendue au sens des traces.

Il s'agit donc d'un problème de calcul des variations à intégrales multiples scalaire : les fonctions admissibles sont définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Dans le cas du problème (P), l'existence de solutions est garantie sous une hypothèse de superlinéarité du lagrangien f (outre la convexité), par la méthode directe en calcul des variations. Ici, on s'intéresse principalement à la question de la régularité des solutions.

La théorie classique (théorie de Schauder pour les EDP linéaires) affirme que si u est $C^{1,\alpha}$, alors u est aussi régulière que les données le permettent. Comme conséquence du théorème de De Giorgi sur la régularité hölderienne des solutions des EDP elliptiques linéaires à forme divergentielle à coefficients mesurables bornés, on voit facilement que si u est lipschitzienne, alors u est (localement) $C^{1,\alpha}$ (pour tout $\alpha \in (0,1)$ et en supposant $f \in C^2$). Pour un énoncé précis, on pourra se rapporter par exemple à la dernière section de [15]. C'est la théorie intermédiaire qui est le coeur du présent développement : comment établir la continuité d'une solution, idéalement au sens de Lipschitz ? Ce qui suit pourrait se résumer à la question suivante : si f, Ω, ϕ sont C^∞, f étant supposé de plus strictement convexe et superlinéaire (de sorte qu'il existe une unique solution), cette solution est-elle continue sur Ω, voire sur $\bar{\Omega}$? Peut-on l'espérer continue au sens de Hölder ? de Lipschitz ? Ces questions restent largement ouvertes.

Habituellement, on distingue deux approches dans l'ensemble des travaux publiés sur ce sujet : une approche globale, qui peut être considérée comme une application de la théorie des barrières ; et une approche locale, dont le résultat fondateur est le théorème de De Giorgi déjà évoqué.

2 Théorie globale

Ici, le principe général est de voir comment la contrainte qu'impose la condition au bord entraîne la régularité de la solution. Par condition au bord, on entend non seulement les propriétés, notamment de régularité, de la fonction ϕ, mais aussi les propriétés, notamment géométriques, du domaine Ω. Plus explicitement, si ϕ est continue, la solution est-elle continue sur Ω, voire sur son adhérence ? Lorsque Ω est convexe, on a le résultat suivant (voir [2]) :

Théorème 1 *Si f est superlinéaire et convexe, Ω convexe, ϕ continue, alors il existe une solution continue sur $\bar{\Omega}$ à (P).*

L'existence d'une solution découle de la méthode directe. C'est la continuité d'une solution qui est nouvelle ici. Le lagrangien n'étant pas *strictement* convexe, plusieurs solutions peuvent éventuellement exister. On peut en fait donner un énoncé plus précis que le précédent : pour des lagrangiens convexes et non strictement convexes, Mariconda et Treu ([21]) ont montré l'existence dans $W^{1,1}(\Omega)$ d'un plus grand minimiseur, c'est-à-dire d'une solution supérieure ou égale, presque partout, à tous les autres minimiseurs de $W^{1,1}(\Omega)$ (ayant même condition au bord). De même, il existe un plus petit minimiseur. La preuve du Théorème 1 montre que le plus grand et le plus petit des minimiseurs sont continus sur $\bar{\Omega}$. Ceci nous mène à notre premier problème ouvert :

Problème ouvert 1 *Sous les hypothèses du Théorème 1, est-ce que toutes les solutions sont continues ?*

La preuve du Théorème 1 s'inscrit dans la théorie des barrières. Rappelons qu'une barrière, supérieure par exemple, est une fonction qui majore *a priori* toute solution, et coïncide avec elle sur tout ou partie de $\partial\Omega$. Elle permet d'obtenir des informations sur le comportement des solutions au voisinage de $\partial\Omega$. Par exemple, l'existence de deux barrières lipschitziennes, l'une supérieure, l'autre inférieure, encadrant une solution, implique que le gradient de celle-ci est borné près de $\partial\Omega$.

Pour démontrer le Théorème 1, on considère un problème auxiliaire (P_0), où on conserve le lagrangien f, mais où les fonctions admissibles sont définies sur un ouvert Ω_0 contenant Ω et bénéficiant de bonnes propriétés géométriques, avec un prolongement adéquat ϕ_0 de ϕ définissant la condition au bord de Ω_0. La solution du nouveau problème (P_0) est utilisée comme barrière pour contrôler le comportement de la solution du problème initial au voisinage de la frontière.

Cette même idée a été réexploitée par la suite avec un certain succès : Mariconda et Treu ont montré (voir [23]) :

Théorème 2 *Si f est convexe et coercive (i.e. il existe $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ et $p > 1$ tels que $f(\xi) \geq a|\xi|^p + b$), si ϕ est lipschitzienne et Ω convexe, alors il existe une solution hölderienne sur $\bar{\Omega}$.*

On observe donc qu'une régularité croissante de la condition au bord induit une régularité croissante de la solution. Ce phénomène pourrait être mis en parallèle avec les travaux de Liebermann sur les EDP quasilinéaires uniformément elliptiques. Dans la théorie classique de Schauder, si ϕ est $C^{2,\alpha}$, alors il existe une solution $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. Par approximation, on peut montrer que si ϕ est C^0, alors il existe une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Liebermann a établi les résultats intermédiaires (voir [16], [17], [18] où la théorie des barrières joue un rôle prépondérant) :

- $\phi \in C^{0,\alpha} \Longleftrightarrow u \in C^{0,\alpha/2}$ si $\alpha \in (0,1]$,
- $\phi \in C^1 \Longleftrightarrow u \in C^{0,\alpha}$ pour tout $\alpha \in (0,1)$,
- $\phi \in C^{1,\alpha} \Longleftrightarrow u \in C^{1,\alpha}$ si $\alpha \in (0,1)$,

et de plus ces résultats de régularité sont optimaux.

Par analogie, on est conduit à la question suivante pour le problème (P) :

Problème ouvert 2 *Si ϕ est continue au sens de Hölder, en est-il de même pour u ?*

Les deux théorèmes précédents ont été établis sous l'hypothèse de convexité de Ω.

Problème ouvert 3 *Dans les deux résultats précédents, peut-on remplacer Ω convexe par Ω lipschitzien ?*

Naturellement, il est exclu d'obtenir la continuité des solutions sur un ouvert irrégulier, comme le montrent les contrexemples classiques en théorie du potentiel. Néanmoins, lorsque le lagrangien ne dépend que de la norme du gradient, on peut se passer de la convexité de Ω (voir [3]) :

Théorème 3 *Si $f(\xi) = L(|\xi|)$ avec f strictement convexe et superlinéaire, ϕ continue et si Ω vérifie une condition de sphère extérieure, alors la solution de (P) est continue sur $\bar{\Omega}$.*

La condition de sphère extérieure signifie que pour tout $\gamma \in \partial\Omega$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ tel que $|x - \gamma| = R$, $B(x,R) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. On n'exige pas que R soit indépendant de x.

Esquisse de preuve du Théorème 3:

1) Pour les lagrangiens qui ne dépendent que du gradient, on dispose d'un principe de comparaison qui s'énonce simplement : si on sait comparer

deux conditions au bord ϕ_1 et ϕ_2 sur $\partial\Omega$, alors on sait comparer les minimiseurs associés u_1 et u_2 dans Ω. Ce principe de comparaison a la conséquence suivante : si u est solution dans $W^{1,1}(\Omega)$, alors

$$\sup_{x,y\in\Omega} |u(x) - u(y)| = \sup_{x\in\Omega, y\in\partial\Omega} |u(x) - u(y)| \tag{1}$$

(plus précisément, x, y sont en fait pris parmi les points de Lebesgue de u et on définit $u = \phi$ sur $\partial\Omega$). Ainsi, pour estimer la différence entre les valeurs prises par u en deux points de $\bar{\Omega}$, on peut se limiter au cas où l'un des deux points est sur la frontière de Ω. On obtient (1) en appliquant le principe de comparaison à u et à une version translatée de u.

Pour montrer la continuité de u sur $\bar{\Omega}$, il suffit donc de montrer la continuité de u au bord de Ω :

$$\forall \gamma \in \partial\Omega, \lim_{x\to\gamma} u(x) = \phi(\gamma).$$

2) Par approximation de ϕ, on se ramène facilement au cas où ϕ est supposée lipschitzienne, ce qu'on suppose désormais.

3) Fixons $\gamma \in \partial\Omega$. Il existe $x \in \mathbb{R}^n$, $R_- < R_+$ tels que

$$\Omega \subset B(x,R_+) \setminus B(x,R_-) =: \Omega_0 \quad , \quad \gamma \in \partial\Omega_0.$$

L'ouvert Ω_0 est un anneau, dont on va utiliser les propriétés de symétrie. Soit u_0 la solution de

$$(P_0) \quad \text{Minimiser} \quad v \mapsto \int_{\Omega_0} f(\nabla v) \quad , \operatorname{tr} v_{|\Omega_0} = \phi_0,$$

où ϕ_0 est une fonction convexe telle que $\phi_0(\gamma) = \phi(\gamma)$, $\phi_0 \geq \phi$ sur $\partial\Omega$. Alors u_0 est continue sur $\overline{\Omega_0}$. Pour le voir, on utilise deux ingrédients :

a) le principe de comparaison appliqué à u_0 et à une version de u_0 composé à la source par une rotation de centre x (ici on utilise le fait que le lagrangien ne dépend que de la norme du gradient) montre que le restriction de u_0 à tout cercle est lipschitzienne ;
b) sur presque chaque rayon, la restriction de u_0 est $W^{1,1}$ donc continue.

La continuité tangentielle uniforme jointe à la continuité radiale sur presque tous les rayons donne la continuité de u_0 sur $\overline{\Omega_0}$.

4) Comme ϕ_0 est convexe, on vérifie facilement que $u_0 \geq \phi_0$ et donc $u_{0|\partial\Omega} \geq \phi$. Par le principe de comparaison, $u_0 \geq u$ sur Ω de sorte que

$$\limsup_{x\to\gamma} u(x) \leq \limsup_{x\to\gamma} u_0(x) = \phi_0(\gamma) = \phi(\gamma).$$

Symétriquement, on a $\liminf_{x\to\gamma} u(x) \geq \phi(\gamma)$, d'où finalement

$$\lim_{x\to\gamma} u(x) = \phi(\gamma).$$

Problème ouvert 4 *Dans l'énoncé du Théorème 3, a-t-on u hölderienne si ϕ est lipschitzienne ?*

Problème ouvert 5 *Dans les trois résultats précédents, on a supposé le lagrangien superlinéaire. Peut-on supprimer cette hypothèse ?*

Comme on voit, le coeur de la preuve est la construction de barrières au bord de l'ouvert à partir de solutions de problèmes auxiliaires. C'est aussi le cas du résultat suivant (voir [3]), dont la preuve suggère que cette méthode est très souple, puisqu'ici le problème auxiliaire est posé non seulement avec un domaine Ω_0 différent de Ω, mais également avec un lagrangien différent du lagrangien initial (en fait, une version partiellement linéarisée du lagrangien initial).

Théorème 4 *On considère*

$$(\tilde{P}) \quad \textit{Minimiser } u \mapsto \int_\Omega \{f(\nabla u(x)) + g(x,u(x))\}\, dx \quad u_{|\partial\Omega} = \phi$$

avec
(Hf) f est C^2, et il existe $\mu > 0$ tel que $\nabla^2 f \geq \mu$,
(Hg) g est C^1,
(HΩ) Ω est convexe,
(Hϕ) ϕ est continue.
Alors toute solution bornée de ($\tilde{P}$) est continue sur $\bar{\Omega}$. De plus, si ϕ est lipschitzienne, alors u est hölderienne.

On peut en fait se passer de f C^2 et supposer simplement g mesurable en x et localement lipschitzienne en u, uniformément par rapport à x.

Cet énoncé ne considère donc pas des lagrangiens ayant une dépendance générale en x et u. La dernière section montrera qu'il est vain d'espérer une telle généralisation. Néanmoins,

Problème ouvert 6 *Peut-on obtenir des résultats de régularité pour des lagrangiens de la forme $a(x)f(\nabla u)$ où a est une fonction régulière vérifiant $1 \leq a \leq 2$ (et f est convexe et superlinéaire) ?*

Tous les théorèmes présentés jusqu'ici sont récents et ne concernent que la continuité, éventuellement höderienne, des solutions. En fait, la théorie est plus ancienne et concernait la régularité au sens de Lipschitz. Sans remonter à Hilbert, on peut citer le théorème de Miranda suivant (voir [24]):

Théorème 5 *Si f est convexe et ϕ vérifie la condition de pente bornée, alors il existe une solution lipschitzienne à (P).*

La condition de pente bornée revient à exiger que ϕ soit la restriction d'une fonction convexe et d'une fonction concave au bord de Ω. Alternativement, ϕ vérifie la condition de pente bornée s'il existe $Q > 0$ tel que pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe ζ_x^-, $\zeta_x^+ \in \mathbb{R}^n$, $|\zeta_x^\pm| \leq Q$ tels que

$$\phi(x) + \langle \zeta_x^- , y - x \rangle \leq \phi(y) \leq \phi(x) + \langle \zeta_x^+ , y - x \rangle \quad \forall y \in \partial\Omega.$$

La condition de convexité sur Ω n'a pas disparu : on peut voir facilement que si ϕ n'est pas affine, alors la condition de pente bornée implique la convexité de Ω.

Le théorème de Miranda est à la fois un théorème d'existence et de régularité (ici, on n'a pas supposé le lagrangien superlinéaire). Hartman et Stampacchia [15] ont généralisé ce théorème à des lagrangiens de la forme $f + g$ comme dans le théorème 4.

Clarke a introduit une nouvelle condition, moins restrictive que la condition de pente bornée : la condition de pente minorée. Pour les comparer, plaçons-nous sur un ouvert uniformément convexe et $C^{1,1}$: la condition de pente bornée est équivalente à être $C^{1,1}$ tandis que la condition de pente minorée est équivalente à être semiconvexe. On a (voir [7]) :

Théorème 6 *Si f est strictement convexe, Ω convexe et ϕ vérifie la condition de pente minorée, alors la solution de (P) dans $W^{1,1}(\Omega)$, si elle existe, est localement lipschitzienne.*

La restriction de la solution u à tout compact de Ω est donc lipschitzienne, mais la constante de Lipschitz de u peut exploser au bord du domaine. La condition de pente minorée n'implique pas la convexité de Ω mais celle-ci est indispensable dans les preuves. Ce théorème est purement un théorème de régularité (et non d'existence comme dans celui de Miranda). Dès lors,

Problème ouvert 7 *Est-ce que la condition de pente minorée garantit l'existence d'une solution localement lipschitzienne sur Ω, continue sur $\bar{\Omega}$?*

Le Théorème 6 a été étendu dans [4] aux lagrangiens de la forme $f + g$ apparaissant dans l'énoncé du théorème 4.

On conclut cette section par la conjecture suivante : si f est strictement convexe et superlinéaire, ϕ lipschitzienne, Ω lipschitzien, alors la solution de (P) est localement lispchitzienne dans Ω et höldérienne sur $\bar{\Omega}$.

3 Théorie locale

Dans le cadre de la théorie locale, on s'intéresse à la régularité des minimiseurs locaux. On dit que $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ est un minimum local de $v \mapsto \displaystyle\int_\Omega f(\nabla v(x))\,dx$ si

- $f(\nabla u) \in L^1_{loc}(\Omega)$,

- $\displaystyle\int_{supp\,\phi} f(\nabla u) \leq \int_{supp\,\phi} f(\nabla u + \nabla\phi),\ \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$

La théorie locale ne s'intéresse donc pas à la continuité de la condition au bord de Ω, ni à la régularité de Ω. Au contraire, elle est liée aux hypothèses faites sur le lagrangien. Le plus souvent, il s'agit d'hypothèses de croissance du lagrangien, de ses dérivées premières, voire secondes. Le théorème suivant est dû à Giaquinta et Giusti ([12]) mais sa preuve est fondé sur des concepts introduits par De Giorgi :

Théorème 7 *Si f est continu et vérifie*

$$|\xi|^p \leq f(\xi) \leq L(|\xi|^p + 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

alors tout minimiseur local est localement hölderien.

Ici, on ne suppose f ni convexe, ni différentiable. De plus, le même théorème est valable pour f de la forme $f(x,u,\xi)$, avec f mesurable par rapport à x et continue par rapport à (u,ξ). La seule restriction importante est que la fonction majorante a une croissance polynomiale de même degré que la fonction minorante. En fait, cette condition est presque nécessaire au regard du contrexemple suivant dû à Marcellini et Giaquinta (voir [11]):

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 + \frac{1}{2}\xi_n^4$$

pour lequel une solution de l'équation d'Euler Lagrange est

$$u(x_1,\ldots,x_n) = \sqrt{\frac{n-4}{24}}\frac{x_n^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}}$$

qui est dans $W^{1,2}$ pour $n \geq 6$.

On peut modifier ce contrexemple pour que le lagrangien soit uniformément elliptique, au sens où sa hessienne est minorée par une constante strictement positive sur $\mathbb{R}^n$.

On note sur ce contrexemple que u est discontinue le long d'une droite : en particulier, si on considère u comme solution d'un problème avec condition au bord de type Dirichlet, cette condition au bord est nécessairement discontinue. Le contrexemple ne contredit donc pas les résultats de la section 2.

Problème ouvert 8 *1) Existe-t-il des minima locaux discontinus en dimension $3 \leq n \leq 5$?*

2) Existe-t-il des minima locaux discontinus bornés ?

Le contrexemple de Giaquinta et Marcellini montre les limites de la théorie locale dans la mesure où la croissance polynomiale majorante ne peut être quelconque par rapport à la croissance polynomiale minorante. Mais ce n'est pas la fin de la théorie locale. Depuis une vingtaine d'années, beaucoup d'efforts se concentrent sur les lagrangiens qui vérifient une croissance de type (p,q) :

$$|\xi|^p \leq f(\xi) \leq L(|\xi|^q + 1) \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dans ce cadre, Marcellini a montré (voir [19])

Théorème 8 *Si f est C^2 et vérifie*

$$(1 + |\xi|^2)^{(p-2)/2}|\lambda|^2 \leq \langle \nabla^2 f(\xi)\lambda,\lambda \rangle \leq L(1 + |\xi|^2)^{(q-2)/2}|\lambda|^2$$

avec $q/p < (n+2)/n$, alors les minima locaux sont lipschitziens.

Problème ouvert 9 *Quelle est la constante c qui vérifie :*
- *si $q/p < c$, alors les minima locaux sont continus,*
- *si $q/p > c$, alors il existe des minima locaux discontinus.*

Dans le cas d'une croissance du type p,q, la régularité des minima locaux est très sensible à la dépendance du lagrangien en la variable x. Le contrexemple suivant en témoigne (voir [10]): pour tout $\alpha \in (0,1]$, il existe une fonction a hölderienne d'ordre α, positive, telle que si $1 < p < n < n + \alpha < q$, la fonctionnelle

$$u \mapsto \int_B |Du|^p + a(x)|Du|^q$$

admet un minimum local discontinu seulement en 0 (B désigne la boule unité dans $\mathbb{R}^n$). Pour de tels lagrangiens, la théorie globale s'avère donc impuissante.

Références

[1] P. Bousquet, *On the Lower Bounded Slope Condition*, J. Convex Anal. 14 (2007) 119–136.

[2] P. Bousquet, *Boundary continuity of solutions to a basic problem in the calculus of variations*, Adv. in Calc. of Var., (to appear)

[3] P. Bousquet, *Continuity of solutions to a general problem in the calculus of variations on nonconvex domains*, in preparation.

[4] P. Bousquet, F. Clarke, *Local Lipschitz continuity of solutions to a problem in the calculus of variations*, J. Differential Equations 243 (2007) 489–503.

[5] A. Cellina, *On the bounded slope condition and the validity of the Euler Lagrange equation*, SIAM J. Control Optim. 40 (2001/2002) 1270–1279.

[6] A. Cellina, *Comparison results and estimates on the gradient without strict convexity*, SIAM J. Control Optim. 46 (2007) 738–749.

[7] F. Clarke, *Continuity of solutions to a basic problem in the calculus of variations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) 4 (2005) 511–530.

[8] E. De Giorgi, *Sull'analiticità delle estremali degli integrali multipli*, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 20 (1956) 438–441.

[9] G. Mingione, *Regularity of minima: an invitation to the dark side of the calculus of variations*, Appl. Math. 51 (2006) 355–426.

[10] L. Esposito, F. Leonetti and G. Mingione, *Sharp regularity for functionals with* (p,q) *growth*, J. Differential Equations 204 (2004) 5–55.

[11] M. Giaquinta, *Growth conditions and regularity, a counterexample*, Manuscripta Math. 59 (1987) 245–248.

[12] M. Giaquinta, E. Giusti, *On the regularity of the minima of variational integrals*, Acta Math. 148 (1982) 31–46.

[13] P. Hartman, *On the bounded slope condition*, Pacific J. Math. 18 (1966) 495–511.

[14] P. Hartman, *Convex sets and the bounded slope condition*, Pacific J. Math. 25 (1968) 511–522.

[15] P. Hartman, G. Stampacchia, *On some non-linear elliptic differential-functional equations*, Acta Math. 115 (1966) 271–310.

[16] G. Lieberman, *The quasilinear Dirichlet problem with decreased regularity at the boundary*, Comm. Partial Differential Equations 6 (1981) 437–497.

[17] G. Lieberman *The Dirichlet problem for quasilinear elliptic equations with Hölder continuous boundary values*, Arch. Rational Mech. Anal. 79 (1982) 305–323.

[18] G. Lieberman *The Dirichlet problem for quasilinear elliptic equations with continuously differentiable boundary data*, Comm. Partial Differential Equations 11 (1986) 167–229.

[19] P. Marcellini, *Regularity and existence of solutions of elliptic equations with* p,q*-growth conditions*, J. Differential Equations 90 (1991) 1–30.

[20] P. Marcellini, *Regularity for some scalar variational problems under general growth conditions*, J. Optim. Theory Appl. 90 (1996) 161–181.

[21] C. Mariconda, G. Treu, *Local Lipschitz regularity of minima for a scalar problem of the calculus of variations*, Commun. Contemp. Math. 10 (2008) 1129–1149.

[22] C. Mariconda, G. Treu, *Lipschitz regularity for minima without strict convexity of the Lagrangian*, J. Differential Equations 243 (2007) 388–413.

[23] C. Mariconda, G. Treu, *Hölder regularity for a classical problem of the calculus of variations*, Adv. in Calc. of Var. 2 (2009) 311–320.

[24] M. Miranda, *Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell' area minima in n variabili*, Annali Scuola Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (3) 19 (1965) 233–249.

[25] G. Stampacchia, *On some regular multiple integral problems in the calculus of variations*, Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963) 383–421.