UN MODÈLE D'ÉQUILIBRE MULTICLASSE

Patrice MARCOTTE

DIRO, Université de Montréal

http://www.iro.umontreal.ca/~marcotte

GDR-MOA, 24 juin 2009

LE CONTEXTE

Équilibre de trafic (Wardrop):

$$\begin{aligned} \bar{v} &= A\bar{x} \\ F(\bar{x}) &= A^t C(A\bar{x}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle F(\bar{x}), \bar{x} - \bar{y} \rangle_2 \leq 0 \qquad \forall \bar{y} \in \bar{X}}$$

Si F est un potentiel:

$$\boxed{\min_{\bar{y} \in \bar{X}} f(\bar{y})}$$

Un modèle bicritère (prix-temps):

$$\boxed{\langle F(\bar{x}) + \alpha G(\bar{x}), \bar{x} - \bar{y} \rangle_2 \leq 0 \qquad \forall \bar{y} \in \bar{X}}$$

Équilibre multiclasse discret

$$\boxed{\begin{array}{l} x^c \in X^c = \{x^c : Ax^c = h^c b, x^c \geq 0\} = h^c \bar{X} \\ \qquad\qquad c = 1, \ldots, p \\ \bar{x} = \sum_{c=1}^{p} x^c \\ \langle F(\bar{x}) + \alpha_c G(\bar{x}), x^c - y^c \rangle_2 \leq 0 \qquad \forall y^c \in X^c, \\ \qquad\qquad c = 1, \ldots, p, \end{array}}$$

ÉQUILIBRE MULTICLASSE CONTINU

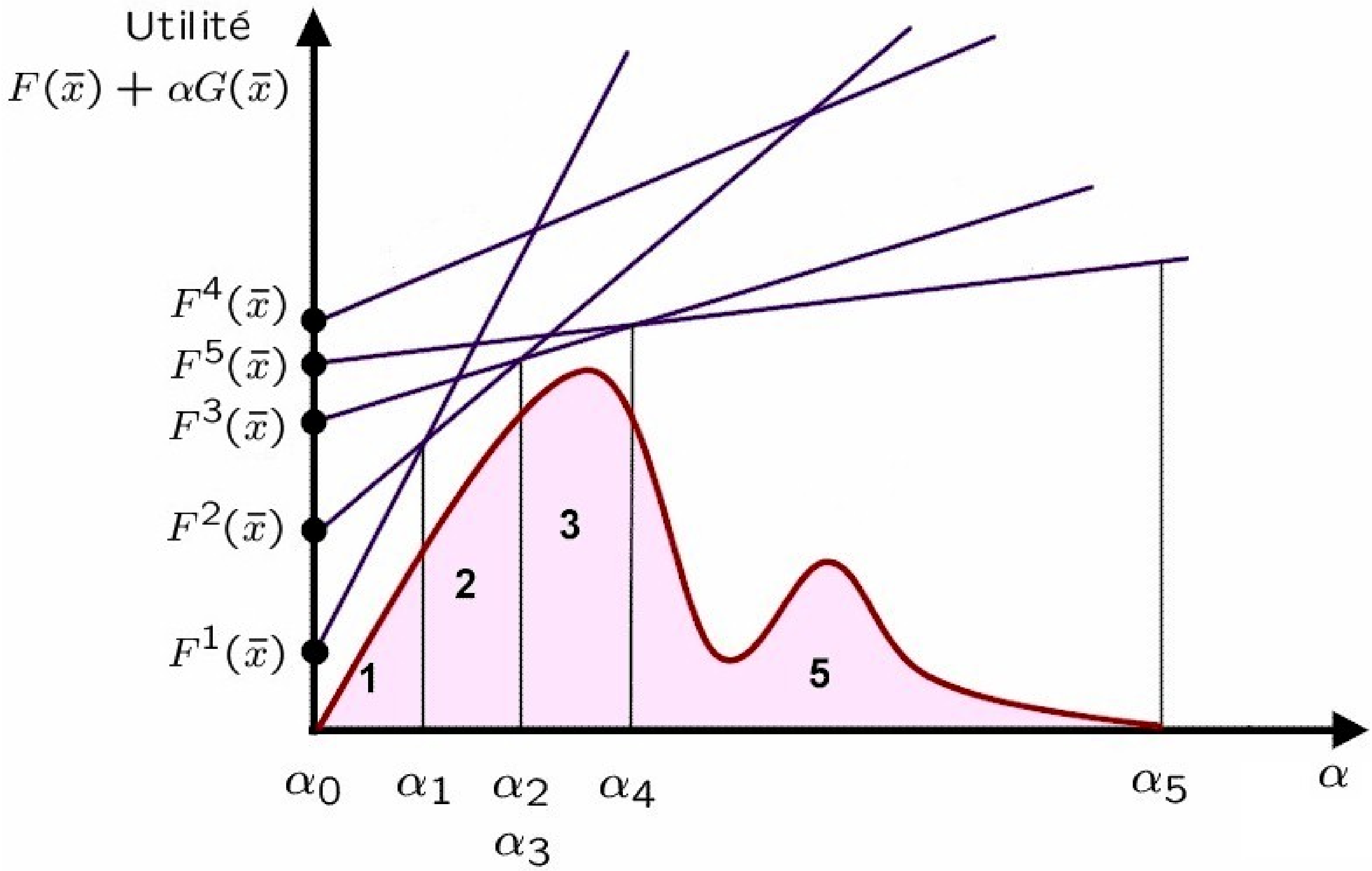
$$\boxed{\begin{array}{l} x(\alpha) \in X(\alpha) \\[2ex] \bar{x} = \int_0^{\alpha_{\max}} x(\alpha)\, d\alpha \\[2ex] \langle F(\bar{x}) + \alpha G(\bar{x}), x(\alpha) - y(\alpha) \rangle_2 \leq 0 \\ \qquad\qquad \forall y(\alpha) \in X(\alpha) \qquad \forall \alpha \in [0, \alpha_{\max}] \end{array}}$$

Pour tout α, $x(\alpha)$ est solution du programme linéaire:

$$\boxed{\min_{\bar{y} \in \bar{X}} \langle F(\bar{x}) + \alpha G(\bar{x}), \bar{y} \rangle_2},$$

dont la solution prend la forme:

$$\boxed{y(\alpha)(\bar{x}) = h(\alpha)\bar{y}^i \qquad \alpha \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i)}$$



Utilité
$F(\bar{x}) + \alpha G(\bar{x})$
$F^4(\bar{x})$
$F^5(\bar{x})$
$F^3(\bar{x})$
$F^2(\bar{x})$
$F^1(\bar{x})$
1
2
3
5
α_0
α_1
α_2
α_3
α_4
α_5
α

FORMULATION EN DIMENSION INFINIE

$$\boxed{\begin{aligned} \langle \Phi, \Psi \rangle &= \int_0^{\alpha_{\max}} \langle \Phi(\alpha), \Psi(\alpha) \rangle_2 \, d\alpha \\ &= \left\langle \int_0^{\alpha_{\max}} \Phi(\alpha)\, d\alpha, \int_0^{\alpha_{\max}} \Psi(\alpha)\, d\alpha \right\rangle_2 \end{aligned}}$$

Si $F = \nabla f$:

$$\boxed{\min_{x \in X} f(\bar{x}) + \int_0^{\alpha_{\max}} \alpha \langle G, x(\alpha) \rangle \, d\alpha}$$

UNE FORMULATION EN DIMENSION FINIE

$$S = \{\widehat{\alpha} : 0 = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_I = \alpha_{\text{max}}\}$$

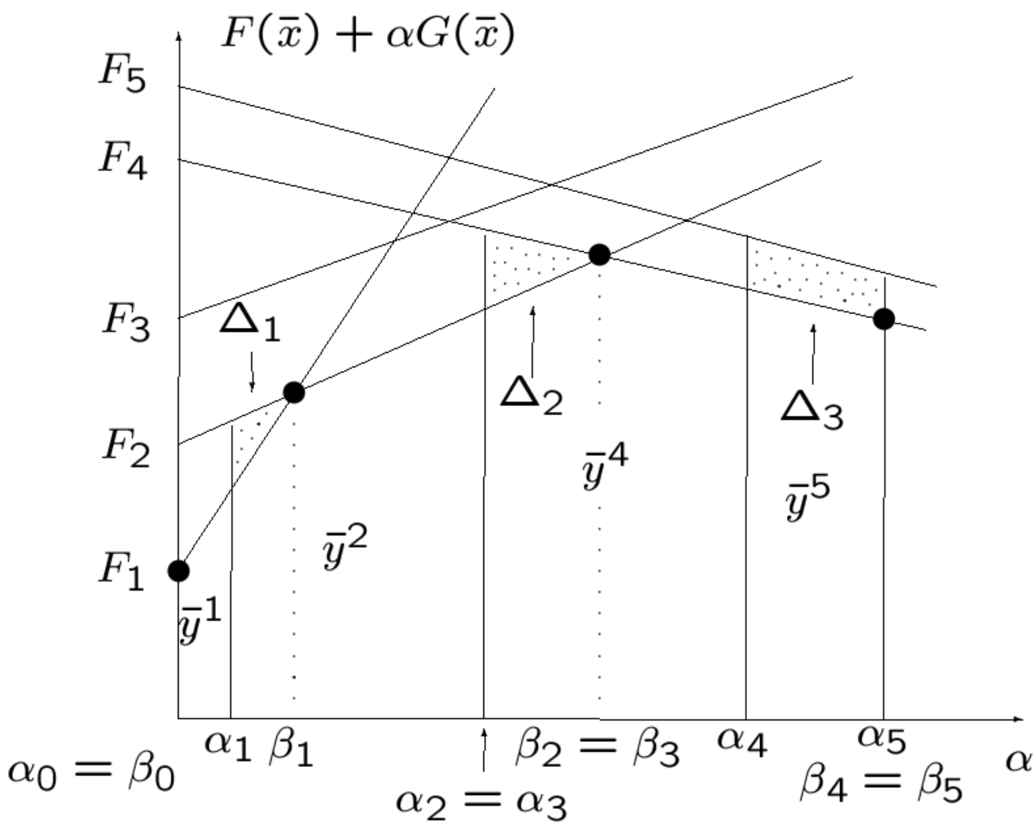
$$U_1(\widehat{\alpha}) = \bar{x}$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{I} \left(\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} h(\alpha)\, d\alpha \right) \bar{y}^i$$

$U_2(\bar{x}) \;=\;$ vecteur $\widehat{\alpha}$ de points critiques optimaux compatibles avec le vecteur de flots totaux $\bar{x}$

Le vecteur $\widehat{\alpha}$ est en équilibre si et seulement si c'est un point fixe de l'application $U_2 \circ U_1$

TH 1 *Si $G^i(\bar{x}) \geq G^{i+1}(\bar{x})$ pour tous les indices i et tous les vecteurs $\bar{x}$ de $\bar{X}$, alors l'ensemble des points fixes est non vide.*



Un vecteur de points critiques en déséquilibre

Hypothèse: $G^i(\cdot)$ constant

Points critiques optimaux $\equiv$ aire minimale (nulle)

$$\min_{\widehat{\alpha}} \quad \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$

$$\sum_{i=1}^{I} \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} (F^i(\bar{x}) + \alpha G^i)\, d\alpha$$

$$= \sum_{i=1}^{I} [F^i(\bar{x})(\alpha_i - \alpha_{i-1}) + \tfrac{1}{2} G^i (\alpha_i - \alpha_{i-1})^2]$$

$$\boxed{\min_{\widehat{\alpha} \in S} \sum_{i=1}^{I} \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} (F^i(\bar{x}) + \alpha G^i)\, d\alpha}$$

$$= \int_0^{\alpha_{\max}} \min_{1 \leq i \leq I} (F^i(\bar{x}) + \alpha G^i)\, d\alpha$$

X: simplexe unité $\qquad \phi = \int f$

Minimisation de l'aire pondéré:

$$\min_{\widehat{\alpha}\in S} q(\widehat{\alpha}) = \sum_{i=1}^{I} \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} [F^i(\bar{x}) + \alpha G^i]\xi(\alpha)\, d\alpha$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \langle \nabla q(\widehat{\alpha}), \widehat{\alpha} - \bar{\beta}\rangle \leq 0 & \forall \bar{\beta} \in S \\ \\ \bar{x}_i(\widehat{\alpha}) = (\phi(\alpha_i) - \phi(\alpha_{i-1})) & i = 1, \ldots, I \end{array}}$$

Gradient de q (i'ème composante):

$$(F^i(\bar{x}) - F^{i+1}(\bar{x}))\xi(\alpha) + (G^i - G^{i+1})\alpha_i\xi(\alpha_i)$$

Formulation variationnelle VI($Q, \widehat{\alpha}$) avec $Q_i(\widehat{\alpha}) =$

$$\boxed{\begin{array}{c} \left[F^i \begin{pmatrix} \phi(\alpha_1) \\ \phi(\alpha_2) - \phi(\alpha_1) \\ \vdots \\ \phi(\alpha_I) - \phi(\alpha_{I-1}) \end{pmatrix} - F^{i+1} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \right] \xi(\alpha_i) \\ \\ +(G^i - G^{i+1})\alpha_i\xi(\alpha_i) \end{array}}$$

TH 2 *Si la pondération ξ est positive (p.p.), alors tout point stationnaire de q est une solution globale du programme mathématique*

$$\min_{\widehat{\alpha} \in S} q(\widehat{\alpha})$$

et par conséquent une solution d'équilibre multiclasse.

Héritage

MONOTONIE: Non, mais mono-transformable

GRADIENT: $\xi = h$

FORMULATION EN FLOTS TOTAUX

Formulation d'optimisation si $F = \nabla f$

$$\boxed{\min \tilde{f} = f(\bar{x}) + \int_0^{\alpha_{\max}} \alpha \langle G, x(\alpha) \rangle \, d\alpha}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_i(\hat{\alpha}) &= \phi(\alpha_i) - \phi(\alpha_{i-1}) \\ \alpha_i(\bar{x}_i) &= \phi^{-1}(\bar{x}_1 + \ldots + \bar{x}_i) \end{aligned}$$

$$\tilde{f} = f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_I) + \sum_{i=1}^{I} G^i \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \alpha x_i(\alpha) \, d\alpha$$

$$= f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{I} G^i(\psi(\alpha_i) - \psi(\alpha_{i-1}))$$

$$= f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{I} G^i[\psi(\phi^{-1}(\bar{x}_1 + \ldots + \bar{x}_i) - \psi(\phi^{-1}(\cdot))]$$

$$= f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{I} G^i[\mu(\bar{x}_1 + \ldots + \bar{x}_i) - \mu(\cdot)]$$

$$= f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{I} [(G^i - G^{i+1})\mu(\sum_{j=1}^{i} \bar{x}_j)]$$

qui mène, à une constante additive près, à

$$\boxed{\min_{\bar{x}\in\bar{X}} f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{I}[(G^i - G^{i+1})\nu(\sum_{j=1}^{i}\bar{x}_j)]}$$

TH 3 *Soit ϕ continue et positive sur l'intervalle $(0, \alpha_{\text{max}})$, et soit $\nu = \int \phi^{-1}$. Alors, $\bar{x} \in \bar{X}$ est un équilibre si et seulement si $\bar{x}$ est une solution de l'inéquation variationnelle VI($F + \nabla g, \bar{X}$), où g est la fonction convexe définie ci-dessous:*

$$g(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{I}[(G^i - G^{i+1})\nu(\sum_{j=1}^{i}\bar{x}_j)].$$

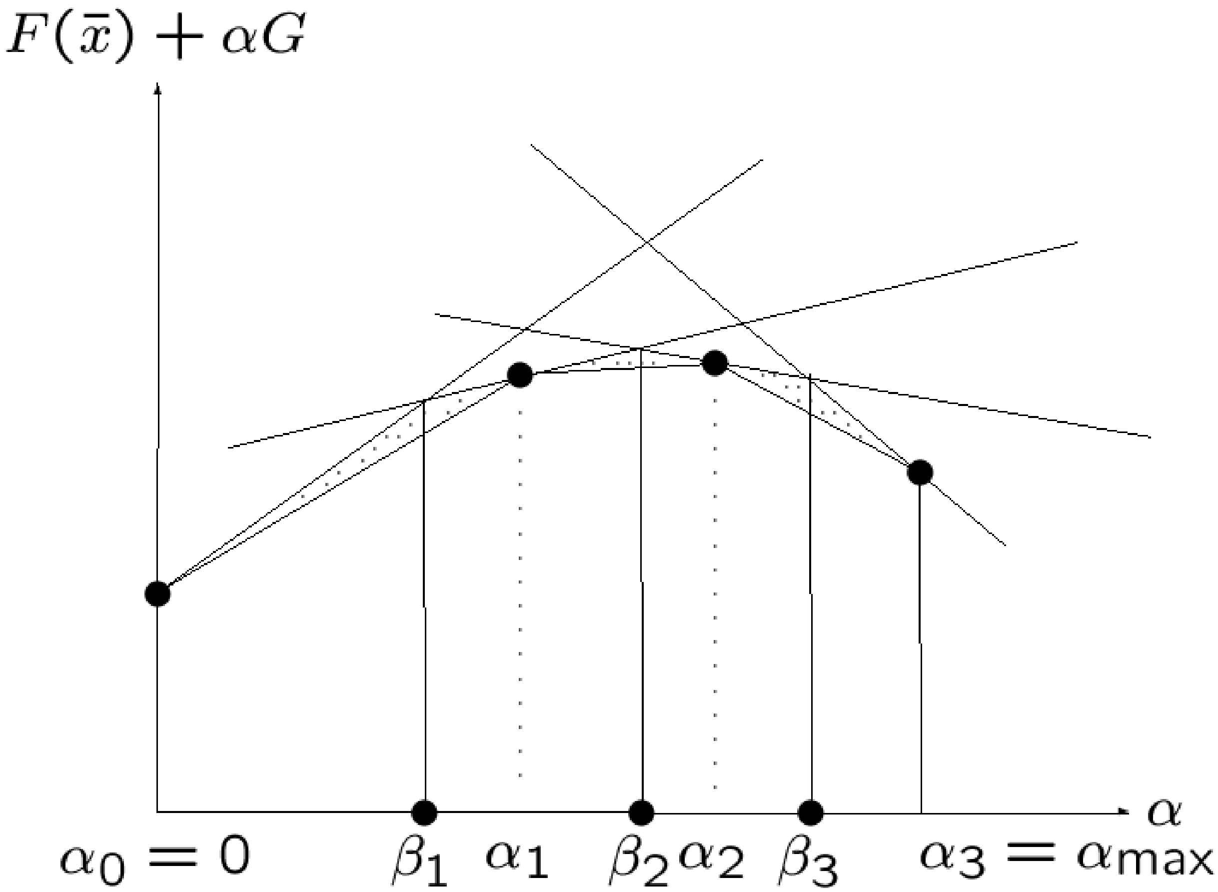
Il s'ensuit qu'un vecteur de points critiques optimaux s'obtient en posant:

$$\alpha_i(\bar{x}_i) = \phi^{-1}(\bar{x}_1 + \ldots + \bar{x}_i) \qquad i = 1, \ldots, I.$$

ALGORITHMES

Frank-Wolfe + simplexe paramétrique (même pour la formulation variationnelle!)

$$\boxed{\min_{x(\alpha)\in X(\alpha)} \langle F(\bar{x}) + \alpha G, x(\alpha)\rangle_2} \qquad \forall\alpha$$



Approximation de la fonction “valeur”.

TARIFICATION OPTIMALE

S-OPT: $\min_{\bar{x} \in \bar{X}} \langle F(\bar{x}), x \rangle$

$$\langle F(\bar{x}) + F'(\bar{x})\bar{x}, \bar{x} - \bar{y} \rangle \leq 0 \quad \forall \bar{y} \in X$$

La tarification marginale $F'(x^*)x^*$ est "optimale".

Soit

$$T = \{\tau : \langle F(x^*) + \tau, x^* - y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in X\}.$$

Problème inverse:

$$\min_{\tau \in T \cap T'} \psi(\tau).$$

De fait, il n'est pas essentiel que $\bar{x}$ soit S-OPT.

DIMENSION FINIE

$$\langle \alpha_c F(\bar{x})) + G, x^c - y^c \rangle_2 \leq 0 \quad \forall y^C \in X^c, \forall c.$$

Bien que l'approche marginale ne soit plus valide, il existe toujours un vecteur de tarifs optimaux (Y&H), par exemple le vecteur dual-optimal du programme linéaire

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x^c \in X^c} & \sum\limits_c \langle \alpha_c F(\bar{x}^*) + G, x^c \rangle \\ \text{sujet à} & \sum\limits_c x^c = \bar{x}^*. \end{array}$$

On peut exiger que les tarifs ne soient pas négatifs en remplaçant $=$ par $\leq$.

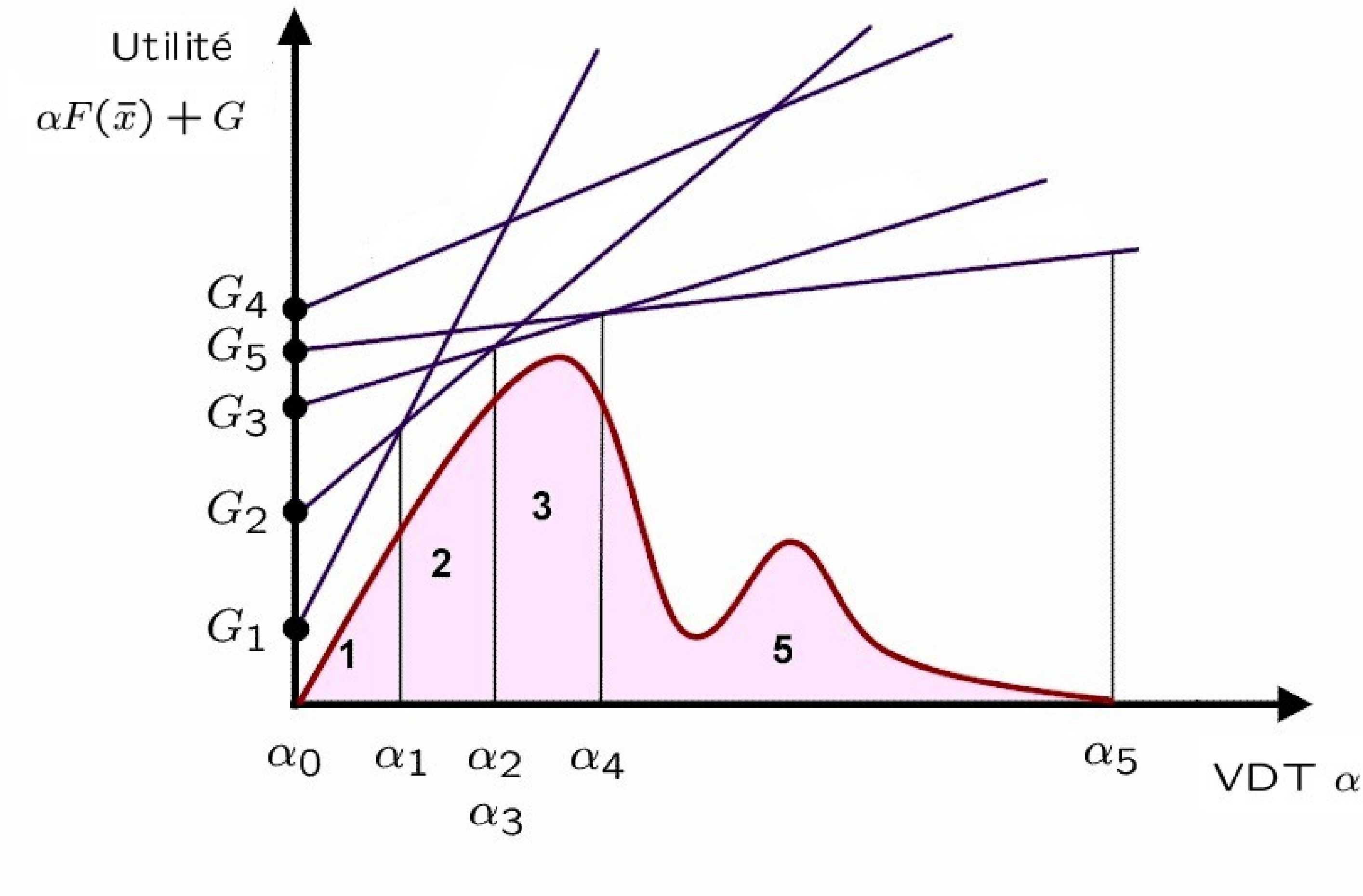
VERSION EN DIMENSION INFINIE

$$\langle \alpha F(\bar{x})) + G, x(\alpha) - y(\alpha) \rangle_2 \leq 0 \quad \forall y(\alpha) \in X\alpha, \forall \alpha$$

ou, après intégration et réarrangement:

$$\langle F(\bar{x}), \int \alpha x(\alpha) - \int \alpha y(\alpha) \rangle + \langle G, \int x(\alpha) - \int y(\alpha) \rangle \leq 0$$

pour tout $y(\cdot) \in \Pi_\alpha(X^\alpha)$.



Utilité
$\alpha F(\bar{x}) + G$
G_4
G_5
G_3
G_2
G_1
1
2
3
5
α_0
α_1
α_2
α_3
α_4
α_5
VDT α

EXISTENCE DE TARIFS OPTIMAUX

- Discrétiser h et passer à la limite (CD&R).

- Imiter le cas en dimension finie:

$$\min_{x(\cdot)} \quad \int \langle \alpha F(\bar{x}^*) + G, x(\alpha) \rangle$$
$$\int x(\alpha) \leq \bar{x}^*$$

- Régularité?

- Alternative: formulation en flots totaux.

- Contraintes non convexes. :-(

- Régularité?

FORMULATION IMPLICITE

$$\text{FLOT TOTAL:} \quad \bar{x} = \int x(\alpha)$$

$$\text{FLOT MOYEN:} \quad \hat{x} = \int \alpha x(\alpha)$$

ENSEMBLE ADMISSIBLE:

$$\Omega = \{(\bar{x}, \hat{x}) : \exists x(\cdot) : \bar{x} = \int x(\alpha), \hat{x} = \int \alpha x(\alpha)\}$$

pour un vecteur de densités de flot $x(\cdot)$.

U-OPT : $\quad \langle F(\bar{x}^*), \hat{x}^* - \hat{x}\rangle_2 + \langle G + \tau, \bar{x}^* - \bar{x}\rangle_2 \leq 0$

$$\forall(\bar{x}, \hat{x}) \in \Omega$$

On en déduit un programme linéaire dont le dual fournit un vecteur de tarifs optimaux:

$$\min_{(\bar{x},\hat{x})\in\Omega} \quad \langle F(\bar{x}^*, \hat{x})\rangle_2 + \langle G, \bar{x}\rangle_2$$

$$\text{sujet à} \quad \bar{x} \leq \bar{x}^*$$

ALGORITHMES

- Montée duale (Dantzig-Wolfe)

- Sous-problème: PL paramétrique
  (unicité de la solution
  sous conditions faibles)

- Lagrangien augmenté
  (méthode des multiplicateurs)

CONCLUSIONS

- Unification des cas discrets et continus
- Dualité forte en dimension infinie
- Seuls les flots totaux et moyens sont pertinents
- Aucun besoin de théorie de la mesure
- Extension possible à des coûts $G(\bar{x})$ dépendant du flot
- Attention: la solution d'utilité maximale dépend du numéraire choisi
(temps ou argent)