# GdR 3273 MOA

## Mathématiques de l'Optimisation et Applications

# Journées annuelles 2013

*Du 17 au 19 juin 2013*

Amphithéâtre Chaudron

*École Nationale Supérieure de Chimie de Paris*

http://gdrmoa.math.cnrs.fr

## Présentation du GdR

Le GdR Mathématiques de l'Optimisation et Applications a pour vocation de regrouper un nombre important de chercheurs français, sur les aspects les plus divers de l'optimisation et de la programmation mathématique :

*optimisation numérique, algorithmes d'optimisation, pratique de l'optimisation numérique et développement logiciel, analyse convexe et quasi-convexe, analyse variationnelle et analyse non lisse, calcul des variations, commande optimale déterministe de systèmes de dimension finie ou infinie (dynamique de populations, équations aux dérivées partielles), inéquations variationnelles et problèmes de complémentarité, systèmes dynamiques non-réguliers, programmation stochastique et contrôle stochastique, programmation robuste, programmation semi-définie, programmation conique,*

et d'en développer les applications et les interactions, notamment dans les domaines suivants :

*traitement de l'image et du signal, aide à la décision, économie, théorie des jeux, finance, gestion des risques, aéronautique, automatique, mécanique rationnelle, mécanique des milieux continus, mécanique statistique, transport, optimisation de formes.*

Afin de tenir compte des évolutions des recherches et applications potentielles dans le domaine de l'optimisation, de nouveaux thèmes seront développés au sein du GdR. Il s'agit en particulier de :

*optimisation polynomiale et semi-algébrique, représentation semidéfinie des ensembles convexes, problème généralisé des moments, application de l'optimisation au domaine de l'énergie, application en imagerie, apprentissage statistique.*

## Bureau du GdR

*Responsable administratif :*

- Didier Aussel, Université de Perpignan Via Domitia, Perpignan

*Responsables scientifiques :*

- Samir Adly, Université de Limoges
- Didier Aussel, Université de Perpignan
- Patrick Louis Combettes, Université Pierre et Marie Curie, Paris
- Jean-Bernard Lasserre, LAAS-CNRS, Toulouse
- Jérome Malick, CNRS, Laboratoire J. Kunztmann, Grenoble

# Programme

| **Lundi 17 juin 2013 après-midi** | |
|---|---|
| 13h | *Accueil des participants* |
| 14h | Conférence plénière : **René Henrion** (WIAS Berlin)<br>« Optimisation sous contraintes en probabilité » |
| 15h | **H. Attouch** (Université Montpellier 2)<br>« Systèmes dynamiques et algorithmes forward-backward en optimisation » |
| 15h30 | **J. Maeght** (RTE)<br>« Optimal Power Flow : des problèmes encore bien ouverts » |
| 16h | *Pause-café* |
| 16h30 | **X. Dupuis** (CMAP, Ecole Polytechnique)<br>« Leucémie et contrôle optimal » |
| 17h | **A. Chéry** (Université Paris 1)<br>« Sur l'équivalence des structures financières avec des actifs de long terme » |
| 17h30 | **A. Picarelli** (INRIA Saclay & ENSTA ParisTech)<br>« Reachability for state-constrained stochastic control problems » |
| **Mardi 18 juin 2013 matin** | |
| 9h | Conférence plénière : **Lionel Thibault** (Université Montpellier 2)<br>« Perturbations lipschitziennes de processus de rafle dans BV » |
| 10h | *Pause-café* |
| 10h30 | **B. Abbas** (Université Montpellier 2)<br>« Régularisation en boucle fermée de la méthode de Newton pour les inclusions monotones dans les espaces de Hilbert. Résultats de convergence globale. » |
| 11h | **L. M. Briceño-Arias** (Universidad Técnica Federico Santa María)<br>« Méthode explicite-inverse partielle pour résoudre des inclusions monotones : application à l'aménagement du territoire » |
| 11h30 | **G. Garrigos** (Université Montpellier 2)<br>« Convergence de méthodes de descente avec métrique variable en optimisation non-lisse non-convexe » |

| | |
|---|---|
| **Mardi 18 juin 2013 après-midi** | |
| 14h | Conférence plénière : **Monique Laurent** (CWI, Amsterdam and Tilburg University)<br>« Semidefinite programming, matrix completion and geometric graph realizations » |
| 15h | **F. Bonnans** (INRIA Saclay & CMAP, Ecole Polytechnique)<br>« Résolution de problèmes de commande optimale avec arc singulier par la méthode de tir » |
| 15h30 | **M. Théra** (XLIM, Université de Limoges)<br>« Sur un résultat de Teck-Cheong Lim » |
| 16h | *Pause-café* |
| 16h30 | **A. Aboussoror** (Université Cadi Ayyad, Maroc)<br>« Dualité de Fenchel-Lagrange pour un problème d'optimisation à deux niveaux à fonction valeur extrémale » |
| 17h | **Ba Khiet Le** (XLIM, Université de Limoges)<br>« Analyse de la robustesse, de la stabilité et du caractère bien posé pour les systèmes Lagrangiens avec des contrôleurs multi-valués » |
| **Mercredi 19 juin 2013 matin** | |
| 9h | Conférence plénière : **Marc Lassonde** (Université des Antilles et de la Guyane)<br>« Capacité d'absorption monotone des sous-différentiels et condition d'optimalité pour fonctions sci » |
| 10h | *Pause-café* |
| 10h30 | **R. Omheni** (XLIM, Université de Limoges)<br>« Méthode de lagrangien augmenté primale-duale pour l'optimisation non linéaire » |
| 11h | **S. Zaourar** (INRIA, UJF, Grenoble)<br>« Méthodes de faisceaux avec oracle inexact et incontrôlé » |
| 11h30 | **H. Rammal** (XLIM, Université de Limoges)<br>« Une nouvelle méthode pour résoudre le problème de complémentarité aux valeurs propres contraint par le cône du second-ordre » |
| **Mercredi 19 juin 2013 après-midi** | |
| 14h | Conférence plénière : **A. D'Aspremont** (Ecole Polytechnique)<br>« Reconstruction de phase, maxcut et programmation semi-définie en complexes » |
| 15h | **T.T.P. Truong** (Unversité d'Avignon et des Pays de Vaucluse)<br>« Strong equilibrium in a multi-product multi-criteria supply-demand network with capacity constraints » |
| 15h30 | *Pause-café* |
| 16h | **Thi Nguyet Nga TA** (XLIM, Université de Limoges)<br>« Modèle discret pour le tas des sable » |
| 16h30 | **D. Aussel** (PROMES, Université de Perpignan)<br>« Single-directionality ou quand une multiapplication n'en est pas vraiment une » |

# RÉSUMÉS

# DES

# PRÉSENTATIONS

# Optimisation sous contraintes en probabilité

**René Henrion**
WIAS Berlin

Les contraintes en probabilité représentent un modèle de base de l'optimisation stochastique. Elles permettent de trouver des décisions robustes par rapport à l'action des aléas sans causer des coûts excessifs. Le défi principal de ce type de contraintes repose sur le fait qu'elles ne sont pas données par une formule explicite. Seul leur approximation numérique est possible en général. Cette difficulté nécessite des considérations particulières dans l'analyse de la structure (par ex. continuité, différentiabilité, convexité), de la numérique (calcul de gradients) où de la stabilité des solutions (par rapport aux perturbations de la loi nominale de l'aléa). L'exposé touche plusieurs de ces aspects et présente des résultats numériques pour certaines applications.

# Systèmes dynamiques et algorithmes forward-backward en optimisation

**Heddy Attouch**
Université Montpellier 2

**Résumé:** Dans un cadre Hilbertien, nous introduisons de nouveaux systèmes dynamiques qui sont liés aux méthodes de Newton et Levenberg Marquardt. Ces dynamiques visent à résoudre des inclusions monotones gouvernées par des opérateurs structurés $M = A + B$, où $A$ est un maximal monotone général et $B$ est monotone Lipschitzien. A l'aide de la représentation de Minty de $A$, on reformule ces dynamiques sous une forme relevant du théorème de Cauchy-Lipschitz. On montre la convergence asymptotique des trajectoires vers des zéros de l'opérateur $M = A + B$. La discrétisation temporelle de ces dynamiques fournit de nouveaux algorithmes combinant la méthode de Newton et les méthodes forward-backward en optimisation. Nous examinons également des versions inertielles de ces algorithmes.

## Références

[1] H. Attouch and B. Svaiter, *A continuous dynamical Newton-like approach to solving monotone inclusions*, SIAM J. Control Optim. **49** No 2, (2011), pp. 574–598.

[2] B. Abbas, H. Attouch, and B. Svaiter, *Newton-like dynamics and forward-backward algorithms for structured monotone inclusions in Hilbert spaces*, March 2013.

[3] H. Attouch, J. Peypouquet, and P. Redont, *A dynamical approach to an inertial forward-backward algorithm for convex minimization*, February 2013.

# Optimal Power Flow : des problèmes encore bien ouverts

**Jean Maeght**
RTE Réseau de Transport d'Electricité - Direction R&D Innovation - Département Expertise Système - Versailles, France

**Mots-clefs :** Optimisation numérique non linéaire, méthodes de points intérieurs, optimisation avec contraintes linéaires matricielles, power systems

RTE est en charge du réseau de transport d'électricité en France. La plupart des études de réseau sont réalisées au moyen d'outils de simulation : à productions, consommations et interconnexions fixées, on simule les écoulements de puissance dans le réseau ; ces écoulements se font selon les caractéristiques physiques des ouvrages (lignes, câbles, transformateurs, etc...). Ainsi, la règle du "N-1" conduit à simuler systématiquement les pertes d'ouvrages pour vérifier la tenue du réseau quel que soit l'incident.
Lorsqu'on a un peu plus de variables et on passe à l'optimisation, OPF pour Optimal Power Flow, et de nombreuses problématiques conduisent à des OPF au RTE. Une part importante de ces OPF est traitée dans l'approximation du courant continu (DC pour Direct Current), donc avec des OPF linéaires ou linéaires en nombres entiers.
Cependant, dans un grand nombre de cas, l'utilisation de la modélisation non linéaire des réseaux (AC pour Alternative Current) est nécessaire.
Dans cet exposé, nous proposons de présenter les directions de R&D actuelles dans le domaine des OPF au RTE. Nous commencerons par présenter avec un simple réseau à trois noeuds les aspects contre-intuitifs de la modélisation AC. Bien que non-linéaires et non convexes, plusieurs OPF en AC son actuellement déployés à RTE, utilisant généralement des solveurs non linaires par points intérieurs. Nous présenterons ce qui fonctionne et les développements en cours [1]. Enfin, des approches novatrices par programmation semi-définie ont été publiées très récemment. Nous les introduirons et présenterons les travaux qui ont démarré sur ce thème [2], [3].

## Références

[1] P. Panciatici, *Optimization Needs and Challenges for Operational Planning and Operation of Large Transmission Systems (European Vision)*, Exposé donné au séminaire du département *Electrical Engineering* de *Columbia University*. http://www.ee.columbia.edu/seminars/2012-2013/fall/Panciatici_Talk/seminar.html

[2] X. Bai and H. Wei and K. Fujisawa and Y. Wang, *Semidefinite programming for optimal power flow problems*, International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 30(6), 383–392.

[3] J. Lavaei and S.H. Low, *Zero duality gap in optimal power flow problem*, IEEE Transactions on Power Systems, 27(1), 92–107.

# Leukemia and optimal control

**Xavier Dupuis**
CMAP, Ecole Polytechnique

**Mots-clefs :** optimal control; cell population dynamics; delay differential equations; hematopoiesis modeling; acute myeloid leukemia

We are interested in optimizing the co-administration of two drugs for some acute myeloid leukemias (AML). This issue can be formulated as an optimal control problem where: the objective is to minimize the number of cancer cells at a fixed time horizon; the dynamics describes the hematopoiesis, i.e. the process of blood production, in the pathological case of AML; the controls represent the action of the drugs; the constraints take into account their toxicity.
The first mathematical model of cell population dynamics for the hematopoiesis has been proposed by Mackey [1] and consists in a system of two delay differential equations. Such models can be justified by considering age-structured partial differential equations, as in [2], which enable us to add the action of the drugs in the dynamics.
The drugs considered are one cytotoxic, which kills cells during a proliferating phase of their cycle, and one cytostatic, which inhibits cells and maintains them in a resting phase. The controlled model that we get can still be reduced to a system of delay differential equations.
After these modeling aspects and once the optimal control problem is set, we study it theoretically and numerically. For some issues, we transform it into an optimal control of ordinary differential equations, following [3]. Then we can in particular use available toolboxes for optimal control, and get optimal protocols of drugs administration. We also provide optimality conditions, and discuss some of the behaviors of the system.

This work is part of the project ALMA, on the Analysis of Acute Myeloid Leukemia, which brings together mathematicians, biologists, and clinicians: Annabelle Ballesta, Faten Mehri, José Luis Avila, Pierre Hirsh, Ruoping Tang, Catherine Bonnet, Jean-Pierre Marie, Jean Clairambault, Frédéric Bonnans. It is based on in vitro experiments realised at Hôpital Saint-Antoine in Paris. Leukemic cell cultures, with and without the drugs, have been carried out in order to affine and calibrate the dynamical model.

## Références

[1] M.C. Mackey. Unified hypothesis of the origin of aplastic anaemia and periodic hematopoiesis. *Blood*, 51:941—956, 1978.

[2] M. Adimy and F. Crauste. Mathematical model of hematopoiesis dynamics with growth factor-dependent apoptosis and proliferation regulations. *Math. Comput. Modelling*, 49(11-12):2128–2137, 2009.

[3] L. Göllmann, D. Kern, and H. Maurer. Optimal control problems with delays in state and control variables subject to mixed control-state constraints. *Optimal Control Appl. Methods*, 30(4):341-365, 2009.

# Sur l'équivalence des structures financières avec des actifs de long terme

**Jean-Marc Bonnisseau**
Paris School of Economics, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne

**Achis Chéry**
Paris School of Economics, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne

**Mots-clefs :** Marchés incomplets, équilibre financier, modèle à plusieurs périodes, structures financières équivalentes, forme réduite, sous-structure financière.

Nous introduisons une relation d'équivalence sur les structures financières à plusieurs périodes. Nous disons que deux structures financières sont équivalentes si, pour chaque prix d'état, les images des matrices des paiements complétées des ces structures sont égales, quelque soit le vecteur prix d'atif associé au prix d'état donné. L'intuition qui est derrière cette définition est que les structures financières permettent aux agents de transférer l'ensemble de leurs richesses entre les nœuds de l'arbre des événements et cela leur donnera la possibilité d'élargir leurs ensembles de budget. La principale conséquence de cette définition est que, quelque soit l'économie d'échange standard $\Sigma$, l'existence d'un équilibre financier dans l'économie d'échange $\Sigma$ associée à une structure financière $\mathcal{F}$ est équivalent à l'existence d'un équilibre dans $\Sigma$ associée à n'importe quelle autre structure financière $\mathcal{F}'$ appartenant à la classe d'équivalence de $\mathcal{F}$. Nous exhibons des conditions suffisantes pour avoir l'équivalence de deux structures financières avec possibilité d'avoir des actifs de long terme. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'équivalence, si tous les actifs sont de court terme. Nous montrons aussi, sous certaines hypothèses, qu'une structure financière est équivalente à chacune des ses formes réduites.

## Références

[1] L. Angeloni and B. Cornet. Existence of financial equilibria in a multi-period stochastic economy., 8:1-31, 2006. *Mathematical Economics,* **8** (2006) 1-31.

[2] M. Magill and M. Quinzii. Theory of Incomplete Markets. Cambridge, 1996. *Cambridge*, (1996).

[3] J.-M. Bonnisseau and A. Chery. Sensitivity of marketable payoffs with long-term assets. Working Paper, *Université Paris 1*, 2013.

# Reachability for state-constrained stochastic control problems

**Athena Picarelli**
INRIA Saclay-Ile de France and École Polytechnique ParisTech,

**Olivier Bokanowski**
Université Paris-Diderot (Paris 7), Laboratoire Jacques-Louis Lions (Paris 6), Ensta ParisTech,

**Hasnaa Zidani**
Unité de Mathématiques Appliquées (UMA) ENSTA ParisTech

**Mots-clefs :** Stochastic optimal control, state-constraints, reachability, stochastic target problems.

This work is concerned with stochastic optimal control problems with a cost depending on a running maximum. A direct approach based on dynamic programming techniques is proposed and a characterization of the value function as unique solution of a second order Hamilton-Jacobi-Bellman equation with oblique derivative boundary conditions is obtained. A numerical scheme is presented and error bounds provided. This work is strongly motivated by the will of developing an alternative and numerically effective way for dealing with state-constraints in stochastic control and in particular in stochastic target problems. In fact optimal control problems with a running maximum cost will arise in the characterization of the backward reachable set for a system of controlled stochastic differential equation applying the level set approach together with an exact penalization technique.

# Perturbations lipschitziennes de processus de rafle dans BV

**Lionel Thibault**
Université Montpellier 2

Dans cet exposé je présenterai plusieurs résultats sur les perturbations Lipschiziennes de processus de rafle. J'insisterai tout particulièrement sur le cas BV que j'ai étudié récemment avec S. Adly et T. Haddad.

# Régularisation en boucle fermée de la méthode de Newton pour les inclusions monotones dans les espaces de Hilbert. Résultats de convergence globale.

**Boushra Abbas**
Université Montpellier 2

Dans un cadre Hilbertien, en vue de la recherche de zéros d'opérateurs maximaux monotones, nous étudions de nouvelles dynamiques continues obtenues par régularisation de la méthode de Newton, et analysons leurs propriétés de convergence globale. En particulier, on s'intéressera aux problèmes d'optimisation convexe, et aux problèmes de points selles convexes-concaves.
Suivant [1], on examine le cas où le terme de régularisation est du type Levenberg-Marquardt, et agit en boucle ouverte. Le coefficient $\lambda(t)$ du terme de régularisation est autorisé à tendre vers zéro lorsque $t$ tend vers l'infini (pas plus vite que $e^{-t}$), ce qui fournit une dynamique proche asymptotiquement de la méthode de Newton. Le coefficient $\lambda$ peut être pris à variation bornée.
Suivant [2], on montre comment passer de la régularisation en boucle ouverte à la régularisation en boucle fermée. Dans la dynamique en boucle ouverte, on établit la dépendance Lipschitzienne de la solution par rapport à $\lambda$. Cette propriété permet, par un argument de point fixe, de montrer l'existence et l'unicité d'une solution globale du problème de Cauchy en boucle fermée.
Dans [3], nous considérons le cas d'un opérateur maximal monotone $M$ structuré: $M = A + B$, où $A$ est un maximal monotone général, et $B$ est monotone Lipschitzien. Ce cadre est bien adapté aux applications. Nous étendons les résultats précédents en étudiant des dynamiques de type Newton régularisées faisant intervenir de façon séparée les résolvantes de l'opérateur $A$ (implicites) et des évaluations de $B$ (explicites). La discrétisation en temps de ces dynamiques débouche sur de nouveaux algorithmes combinant méthodes forward-backward et méthodes de Newton.

## Références

[1] H. Attouch and B.F. Svaiter, A continuous dynamical Newton-like approach to solving monotone inclusions, SIAM J. Control Optim. 49 No 2, (2011), pp. 574–598.

[2] H. Attouch, P. Redont, and B.F. Svaiter, Global convergence of a closed-loop regularized Newton method for solving monotone inclusions in Hilbert spaces. J. Optim. Theory Appl., published online, doi:10.1007/s10957-012-0222-3, (2012).

[3] B. Abbas, H. Attouch, and B.F. Svaiter, Newton-like dynamics and forward-backward algorithms for structured monotone inclusions in Hilbert spaces, March 2013.

# Méthode explicite-inverse partielle pour résoudre des inclusions monotones : application à l'aménagement du territoire

**Luis M. Briceño Arias**
Universidad Técnica Federico Santa María

Dans ce travail nous proposons une méthode pour résoudre l'inclusion monotone

$$\text{trouver} \quad x \in \mathcal{H} \quad \text{tel que} \quad 0 \in N_V x + Ax + Bx, \tag{1}$$

où $\mathcal{H}$ est un espace hilbertien réel, $V$ es un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$, $N_V$ est le cône normal à $V$, $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ est un opérateur maximalement monotone et $B\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est un opérateur cocoercif sur $V$. L'algorithme proposé est un cas particulier de la méthode explicite-implicite [1] en utilisant comme opérateur monotone multivoque l'inverse partielle de $A$. Dans le cas où $B \equiv 0$, l'algorithme devient la méthode des inverses partielles [2], qui résout

$$\text{trouver} \quad x \in \mathcal{H} \quad \text{tel que} \quad 0 \in N_V x + Ax. \tag{2}$$

D'autre part, dans le cas où $V = \mathcal{H}$, l'algorithme proposé se réduit à la méthode explicite-implicite [1] qui résout

$$\text{trouver} \quad x \in \mathcal{H} \quad \text{tel que} \quad 0 \in Ax + Bx. \tag{3}$$

De plus, on déduit des relations avec la méthode explicite-Douglas-Rachford et on retrouve la méthode proposée dans [3] comme un cas particulier. Dans un cadre variationnel nous appliquons la méthode pour calculer des subventions optimales pour obtenir une aménagement du territoire désiré.

## Références

[1] P. L. Combettes, Solving monotone inclusions via compositions of nonexpansive averaged operators, *Optimization,* **53** (2004) 475–504.

[2] J. E. Spingarn, Partial inverse of a monotone operator, *Appl. Math. Optim.*, vol. 10, pp. 247–265, 1983.

[3] H. Raguet, J. Fadili, and G. Peyré, Generalized forward-backward splitting, http://arxiv.org/abs/1108.4404.

# Convergence de méthodes de descente avec métrique variable en optimisation non-lisse non-convexe

**Guillaume Garrigos**
Université Montpellier 2, France

**Pierre Frankel**
Université Montpellier 2, France

**Juan Peypouquet**
Universidad Técnica Federico Santa María, Chile

**Mots-clefs :** Nonconvex nonsmooth optimization, tame optimization, Kurdyka-Łojasiewicz inequality, o-minimal structures, descent methods with errors, forward-backward splitting, proximal algorithms, variable metric, Newton-like methods.

L'optimisation de fonctions non-convexes non-lisses est un problème apparaissant naturellement dans des domaines tels que le traitement d'image ou en EDP. Prolongeant les résultats de [1], nous présentons une large classe de méthodes de descente qui convergent fortement vers un point critique d'une fonction, sous condition qu'elle se comporte "bien" au voisinage de ses points critiques. Plus exactement nous considérons des fonctions semi-continues inférieurement vérifiant l'inégalité dite de Kurdyka-Łojasiewicz. Elle est par exemple satisfaite en dimension finie par les fonctions analytiques, sous-analytiques bornées ou encore semi-algébriques; tandis qu'en dimension infinie on connait quelques exemples utiles intervenant en EDP, notamment des énergies d'EDP elliptiques qui ont une non-linéarité analytique. Cette classe d'algorithmes recouvre les méthodes classiques de type gradient, les algorithmes proximaux ou implicite-explicite. Mais elles sont généralisées au sens où on peut s'autoriser, pour chaque itération, à prendre en compte une métrique différente. Ceci nous permet d'améliorer la convergence de la suite générée en adaptant la métrique de l'espace en fonction de la géométrie de la fonction, à l'instar des méthodes de type Newton. Enfin, un résultat nouveau sur la vitesse de convergence de ces méthodes sera fourni.

## Références

[1] ATTOUCH H., BOLTE J., SVAITER B.F.: *Convergence of descent methods for semi-algebraic and tame problems: proximal algorithms, forward-backward splitting, and regularized Gauss-Seidel methods*, Math. Program. 137, no. 1-2, 91–129 (2013).

[2] FRANKEL P., GARRIGOS G., PEYPOUQUET J.: *Convergence of descent methods for nonsmooth and nonconvex functions satisfying the Kurdyka- Lojasiewicz inequality*, to appear.

# Semidefinite programming, matrix completion and geometric graph realizations

**Monique Laurent**
CWI, Amsterdam and Tilburg University

We consider the problem of completing a partially specified matrix to a positive semidefinite matrix, with special focus on questions related to the smallest possible rank of such completion. We present complexity results and structural characterizations of the graph of specified entries for the existence of small rank completions, as well as links to Euclidean graph realizations in distance geometry and to some Colin de Verdière type graph parameters. The geometry of semidefinite programming provides a unifying setting and sometimes new simpler proofs, as is the case for instance for Connelly's result about universal rigidity of frameworks.

# Résolution de problèmes de commande optimale avec arc singulier par la méthode de tir

**J. Frédéric Bonnans**
INRIA-Saclay and Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique

**Mots-clefs :** Commande optimale, arc singulier, méthode de tir, contraintes sur l'état

La méthode de tir est basée sur l'élimination de la commande en fonction de l'état et de l'état adjoint, grâce au principe de Pontryagine. Dans le cas le plus simple de problèmes sans contraintes, on ramène alors les conditions d'optimalité à une équation dont la dimension est le nombre de variables d'état, et qui a pour inconnue la condition initiale sur l'état adjoint.
En présence d'arc singuliers on ne peut plus éliminer aussi facilement la commande. Maurer [3] a proposé un algorithme adapté à une classe particulière. Récemment, Aronna et ses coauteurs [1] ont généralisé cette approche, l'équation à résoudre comportant en général plus d'équations que d'inconnues.
Après avoir détaillé ces approches, nous donnerons un nouveau point de vue permettant une autre formulation plus naturelle de l'algorithme de tir [2], et discuterons certains problèmes ouverts.

## Références

[1] S. Aronna, J.F. Bonnans, and P. Martinon. A well-posed shooting algorithm for optimal control problems with singular arcs. *J. Optim. Theory Appl.*. Online First, Jan. 2013.

[2] J.F. Bonnans, The shooting approach to optimal control problems. Proc. IFAC Int. Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, Caen, 3-5 juillet 2013.

[3] Maurer, H., Numerical solution of singular control problems using multiple shooting techniques. *J. Optimization Theory Appl.* 18-2 (1976), 235–257.

# Sur un résultat de Teck-Cheong Lim

**Samir Adly**
Université de Limoges, France

**Asen Dontchev**
Mathematical Reviews, Ann Arbor, USA

**Michel Théra**
Université de Limoges, France

**Mots-clefs :** Le théorème de Lyusternik-Graves, régularité métrique, stabilité Lipschitzienne, points fixes, applications multivoques Lipschiziennes.

Le résultat suivant est du à Teck-Cheong Lim:

Soit $S, T : X \rightrightarrows X$ des applications multivoques à valeurs dans les fermés non vides d'un espace métrique complet $X$. Si $S, T$ sont $\kappa$-Lipschitiennes, c'est-à-dire vérifient :

$$\mathrm{haus}(S(x), S(y)) \leq \kappa d(x, y) \quad \text{pour tous } x, y \in X.$$

Alors

$$\mathrm{haus}(\mathrm{Fix}(S), \mathrm{Fix}(T)) \leq \sup_{x \in X} \mathrm{haus}(S(x), T(x)).$$

Dans cet exposé nous montrerons que sous les mêmes hypothèses, nous pouvons remplacer dans la conclusion du résultat de Lim, la distance de Hausdorff par l'excès.

# Dualité de Fenchel-Lagrange pour un problème d'optimisation à deux niveaux à fonction valeur extrémale

**Abdelmalek Aboussoror**
Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Safi, Maroc

**Samir Adly**
Université de Limoges, Laboratoire XLIM UMR-CNRS 6172
Département de Mathématiques
Limoges, France

**Mots-clefs :** Optimisation à deux niveaux, analyse convexe, dualité.

Soient $F : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ des fonctions, $X$ et $Y$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement. On considère le problème d'optimisation à deux niveaux suivant

$$(S) \qquad \min_{x \in X} F(x, v(x))$$

où $v(x)$ est la valeur du problème

$$\mathcal{P}(x) \qquad \min_{y \in Y} f(x, y).$$

Le problème $(S)$ est appelé un problème d'optimisation à deux niveaux à fonction valeur extrémale. C'est un problème qui est en général non différentiable. En théorie des jeux, il correspond à un jeu de deux joueurs, où un meneur cherche à minimiser sa fonction objectif $F$ sur $X$ et un suiveur qui cherche à minimiser sa fonction objectif $f$ sur $Y$. Pour une stratégie $x \in X$ choisie par le meneur, le suiveur répond par une stratégie $y(x) \in Y$. La formulation du problème $(S)$ considéré dans ce travail correspond au cas où le meneur évalue la performance du suiveur par la valeur de son problème (problème du second niveau).

Dans ce travail, on considère le problème dual de Fenchel-Lagrange de $(S)$. Sous des hypothèses appropriées, nous obtenons une dualité forte entre $(S)$ et son dual $(\mathcal{D})$. Ensuite, via cette dualité, nous établissons des conditions d'optimalité pour le couple $(S)$-$(\mathcal{D})$. Enfin, nous montrons que la résolution du problème dual $(\mathcal{D})$ est équivalente à la résolution d'un problème d'optimisation à un seul niveau.

## Références

[1] I. EKELAND, R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1974.*

[2] R. T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[3] G. WANKA, R. I. BOŢ, *On the relations between different dual problems in convex mathematical programming*, In : Chamoni, P., Leisten, R., Martin, A., Minnermann, J., Stadtler, H. (eds.), Operations Research Proceedings 2001, pp. 255-262, Springer, Berlin, 2002.

# Lagrangian systems with set-valued controllers: well-posedness, robustness and stability Analysis

**Ba Khiet LE**
Université de Limoges, France

**Samir Adly**
Université de Limoges, France

**Bernard Brogliato**
Inria Grenoble, France

**Mots-clefs :** lagrangian systems, set-valued systems, Lyapunov stability, Krasovskii-LaSalle invariance principle, finite-time convergence, robust control.

The aim of this paper is to study a class of nonlinear Lagrange dynamical systems with a multivalued controller of the form:

$$M(q(t))\ddot{q}(t) + C(q(t),\dot{q}(t))\dot{q}(t) + \nabla\mathcal{V}(q(t)) + F(t,q(t),\dot{q}(t)) \in -\partial\Phi(\dot{q}(t)) \quad a.e.\ t \geq t_0, \tag{4}$$

where $t_0 \in \mathbb{R}$ is fixed, $\Phi : \mathrm{dom}(\Phi) = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is a convex function, $\mathcal{V} \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ with its gradient $\nabla\mathcal{V}(\cdot)$, the matrices $M(q), C(q,\dot{q}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, and $\partial\Phi(\cdot)$ stands for the convex subdifferential of $\Phi(\cdot)$. The vector $q$ represents the generalized coordinates, $n$ is the number degrees of freedom, $M(q)$ is the inertia matrix, $C(q,\dot{q})$ is the centripetal - Coriolis matrix. The function $F(t,q(t),\dot{q}(t))$ represents a perturbation force which is usually bounded by a constant. The terms $\nabla\mathcal{V}(q(t))$ and $-\partial\Phi(\dot{q}(t))$ may represent a control input $u(q,\dot{q}) = -\nabla\mathcal{V}(q) - \partial\Phi(\dot{q})$ applied to stabilize the system (in finite time) at some fixed point. The advantage of such controllers is that they are intrinsically robust since the *a priori* knowledge of the system's parameters (like the inertial parameters) is not necessary for stabilization, and an upperbound of the disturbance is sufficient to reject it. In addition the closed-loop system trajectories attain the equilibrium point in finite-time. The analysis in this paper may also be seen as a first step for the study of the digital implementation of such discontinuous controllers, using implicit Euler of zero-order-hold discretizations along the lines of [1, 2]. Such digital implementations allow to suppress the so-called numerical chattering, which is a highly undesirable effect in practice, especially in mechanical structures where one wants to decrease as much as possible the vibrations. They also permit to keep in discrete-time the finite-time convergence property, *i.e.* the attractive surfaces are attained after a finite number of steps.

## Références

[1] V. ACARY, B. BROGLIATO, *Implicit Euler numerical scheme and chattering-free implementation of sliding mode systems*, Systems and Control Letters, vol.59, pp.284-293, 2010.

[2] V. ACARY, B. BROGLIATO, Y. ORLOV, *Chattering-free digital sliding-mode control with state observer and disturbance rejection*, IEEE Trans. Automatic Control, vol. 57, no 5, pp.1087-1101, May 2012.

[3] S. ADLY, H. ATTOUCH AND A. CABOT, *Finite time stabilization of nonlinear oscillators subject to dry friction*, Progresses in Nonsmooth Mechanics and Analysis (edited by P. Alart, O. Maisonneuve and R.T. Rockafellar), Advances in Mathematics and Mechanics, Kluwer, pp. 289-304, 2006.

[4] S. ADLY, D. GOELEVEN, *A stability theory for second-order nonsmooth dynamical systems with application to friction problems*, J. Math. Pures et Appliquées, vol.83, no 1, pp.17-51, 2004.

[5] S. Adly, B. Brogliato, B. K. Le, *Well-posedness,Robustness and Stability Analysis of a Set-Valued Controller for Lagrangian Systems*, accepted by SIAM Journal on Control and Optimization.

[6] J. P. AUBIN, A. CELLINA, *Differential Inclusions*, vol. 264 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

# Capacité d'absorption monotone des sous-différentiels et condition d'optimalité pour fonctions sci

**Marc Lassonde**
Université des Antilles et de la Guyane

Given a set-valued operator $T : X \rightrightarrows X^*$, or graph $T \subset X \times X^*$, and $\varepsilon \geq 0$, we let

$$T^\varepsilon := \{ (x, x^*) \in X \times X^* : \langle y^* - x^*, y - x \rangle \geq -\varepsilon, \ \forall (y, y^*) \in T \}$$

be the set of all pairs $(x, x^*) \in X \times X^*$ which are *$\varepsilon$-monotonically related* to $T$. An operator $T$ is declared to be *monotone absorbing* provided its norm-closure contains its monotonically-related points, in short: $T^0 \subset \overline{T}$. A operator $T$ is declared to be *$\varepsilon$-monotone absorbing* ($\varepsilon \geq 0$) with threshold $\lambda_T \geq 0$ provided for every $\lambda > \lambda_T$,

$$T^\varepsilon \subset \overline{\left(T + \sqrt{\lambda^{-1}\varepsilon}\, B_X \times \sqrt{\lambda\varepsilon}\, B_{X^*}\right)}.$$

In this talk we discuss the monotone-absorption capacity of subdifferentials of lsc functions and show their role in optimality conditions.
In the first part, we present yet another proof of the fundamental maximal monotonicity property of the subdifferential of a proper lsc convex function on a Banach space. The proof relies on two basic principles: the separation principle (or sum rule) of subdifferentials and the variational principle.
In the second part, we show how the previous argument can be modified to establish that in fact any subdifferential $T = \partial f$ of any (possibly non-convex) prox-bounded function with threshold $\lambda_f \geq 0$ is actually $\varepsilon$-monotone absorbing with threshold $\lambda_f \geq 0$ for every $\varepsilon \geq 0$.
In the third part, we consider the case of an arbitrary lsc function. We provide first-order necessary and sufficient conditions for optimality and for radial monotonicity of such functions in terms of their subdifferentials. The latter condition actually shows that all the subdifferentials $\partial f$ of a given lsc function $f$ have the same set of monotonically-related points and all are monotone absorbing.

# Méthode de lagrangien augmenté primale-duale pour l'optimisation non linéaire

**Riadh Omheni**
Université de Limoges, Laboratoire XLIM, France

**Paul Armand**
Université de Limoges, Laboratoire XLIM, France

**Mots-clefs :** Optimisation non linéaire, méthode primale-duale, Lagrangien augmenté, convergence globale, convergence superlinéaire

Récemment, Armand, Benoist, Omheni et Pateloup [1] ont proposé une méthode primale-duale pour la résolution d'un problème d'optimisation non linéaire avec contraintes d'égalité. Cette méthode consiste à résoudre, avec une méthode Newtonienne, des conditions d'optimalité issues d'une pénalisation quadratique des contraintes. Des tests numériques ont montrés que cette méthode est efficace et robuste, en particulier pour la résolution des problèmes dégénérés pour lesquels la Jacobienne des contraintes n'est pas de plein rang. Dans cet exposé, nous présentons un nouvel algorithme primal-dual pour la résolution d'un problème d'optimisation non linéaire avec contraintes d'égalité et d'inégalité, basé sur une méthode Newtonienne appliquée au système d'optimalité perturbé issu d'une reformulation du problème initial en introduisant un Lagrangien augmenté et une pénalisation logarithmique. La globalisation est effectuée par une méthode de recherche linéaire dans l'espace des variables primales et duales. Un aspect important de cet approche est qu'avec un bon réglage des paramètres, la méthode proposée se réduit à une méthode de Newton régularisée appliquée au système d'optimalité du problème initial. Les résultats théoriques de convergence globale et asymptotique sont présentés. En particulier, la convergence superlinéaire est obtenue. Des tests numériques sont présentés pour montrer les performances de notre méthode. En particulier, cette méthode est capable de résoudre l'exemple de Wächter et Biegler [4] pour lequel une classe de méthodes de points intérieurs avec recherche linéaire échoue.

## Références

[1] P. ARMAND, J. BENOIST, R. OMHENI, V. PATELOUP, *Study of a primal-dual algorithm for equality constrained minimization*. Submitted to Comput. Optim. Appl. (2013).

[2] F.E. CURTIS, H. JIANG, D.P. ROBINSON, *Adaptive augmented Lagrangian methods for equality constrained optimization*. Tech. Rep. 12T-016, COR@L Laboratory, Department of ISE, Lehigh University (2012)

[3] P.E. GILL, D.P. ROBINSON, *A primal-dual augmented Lagrangian*. Comput. Optim. Appl. **51**(1), 1–25 (2012).

[4] A. WÄCHTER, L. T. BIEGLER, *Failure of global convergence for a class of interior point methods for nonlinear programming*. Math. Program. **88**, 565–574 (2000).

# Méthodes de faisceaux avec oracle inexact et incontrôlé

**Sofia Zaourar**
UJF, Inria Grenoble, France

**Jérôme Malick**
CNRS, Laboratoire J. Kuntzmann, Grenoble, France

**Welington Oliveira**
IMPA, Rio, Brésil

**Mots-clefs :** optimisation non lisse, algorithmes de faisceaux inexacts, méthode de Kelley, relaxation lagrangienne, décomposition de Benders

Nous nous intéressons à des problèmes d'optimisation convexe où la fonction objectif est coûteuse évaluer. C'est typiquement le cas lorsque la fonction est elle-même le résultat d'un sous-problème d'optimisation; par exemple en relaxation lagrangienne, en optimisation stochastique et en décomposition de Benders. Dans ce contexte, il existe souvent de l'information supplémentaire sur la fonction à minimiser - facile à obtenir mais dont la précision est inconnue - qui n'est pas exploitée dans les algorithmes. Dans ce travail, nous proposons un schéma pour incorporer cette information dans les algorithmes d'optimisation non lisse de type faisceaux. Nous étudions deux instances de ce schéma: une version simple qui est la méthode de Kelley inexacte, et une version plus sophistiquée, la méthode de level bundle inexacte. Nous prouvons la convergence de ces méthodes et montrons sur des problèmes d'optimisation stochastique linéaires à deux niveaux que ce schéma accélère la résolution.

# Une nouvelle méthode pour résoudre le problème de complémentarité aux valeurs propres contraint par le cône du second-ordre

**Hadia RAMMAL**
XLIM, Université de Limoges, France

**Samir ADLY**
XLIM, Université de Limoges, France

**Mots-clefs :** cônes de second-ordre, problème de complémentarité aux valeurs propres contraint par le cône du second-ordre, fonction de complémentarité, méthode de Newton semi-lisse, lattice projection method.

Dans cet article, nous étendons le problème de complémentarité aux valeurs propres EiCP étudié dans [1] à un problème où l'orthant positif, c-à-d, le cône de Pareto est remplacé par le produit des cônes de second-ordre SOC. En particulier, nous traitons le problème de complémentarité aux valeurs propres au sens du cône de second-ordre SOCEiCP, qui consiste à trouver un scalaire $\lambda > 0$ et un vecteur non-nul $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ satisfaisant

$$x \in \mathcal{K}, \ \lambda x - Ax \in \mathcal{K}, \ \langle x, \lambda x - Ax \rangle = 0.$$

où

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \mathcal{K}^{n_2} \times ... \times \mathcal{K}^{n_r},$$

est le produit des cônes de second-ordre avec $n = n_1 + n_2 + ... + n_r$ et $\mathcal{K}^{n_i} \subset \mathbb{R}^{n_i}$ étant le cône du second-ordre, (appelé aussi cône de Lorentz ou ice cream cone), défini par

$$\mathcal{K}^{n_i} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_i - 1} \mid x_1 \geq \|x_2\|\}.$$

Nous reformulons SOCEiCP en un système d'équations semi-lisses en utilisant les fonctions de complémentarité de second-ordre (fonction SOCC) telles que la fonction min $\varphi_{\min}^{\mathrm{soc}}$ et la fonciton Fischer Burmeister $\varphi_{\mathrm{FB}}^{\mathrm{soc}}$. Notre principal objectif dans cet article est de présenter une globalisation de la méthode *Lattice Projection Method LPM* pour résoudre SOCEiCP où LPM a été d'abord définie dans [1] pour résoudre EiCP. L'originalité de ce travail, en comparaison avec [1], est que nous utilisons une globalisation de la méthode de Newton semi-lisse SNM pour approximer les valeurs propres de Lorentz. Ce type de problème, c-à-d SOCEiCP, est considéré comme l'un des problèmes les plus difficiles à résoudre et cela est dû à la structure du spectre de Lorentz qui n'est pas toujours finie. Par conséquent, calculer et détecter toutes les valeurs propres de ce problème n'est pas une tâche facile. De plus, nous étudions sous quelles conditions la matrice jacobienne dans l'algorithme SNM, en une solution, est inversible. LPM est ensuite comparée aux méthodes $\mathrm{SNM}_{\min}$ et $\mathrm{SNM}_{\mathrm{FB}}$, en utilisant les profils de performance comme un outil de comparaison. Les expériences numériques montrent l'efficacité de LPM pour résoudre SOCEiCP.

## Références

[1] S. ADLY and H. RAMMAL, *A New Method For Solving Eigenvalue Complementarity Problems*, to appear in Computational Optimization and Applications.

# Phase recovery, maxcut and complex semidefinite programming

**Alexandre D'Aspremont**
Ecole Polytechnique

**Fajwel Fogel**

**Stéphane Mallat**

**Irène Waldspurger**

Phase retrieval seeks to recover a signal x from the amplitude |Ax| of linear measurements. We cast the phase retrieval problem as a non-convex quadratic program over a complex phase vector and formulate a tractable relaxation (called PhaseCut) similar to the classical MaxCut semidefinite program. We solve this problem using a provably convergent block coordinate descent algorithm whose structure is similar to that of the original greedy algorithm in Gerchberg-Saxton, where each iteration is a matrix vector product. Numerical results show the performance of this approach on wavelet and molecular imaging examples.

# Strong equilibrium in a multi-product multi-criteria supply-demand network with capacity constraints

**TRUONG Thi Thanh Phuong**
Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse, France

**TRUONG Thi Thanh Phuong**
Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse, France

**Mots-clefs :** multi-product multi-criteria supply-demand network, scalarization, strong vector equilibrium, variational inequalities, monotone function, weakly monotone function, Pareto-efficiency

The purpose of this paper is to study a multi-product multi-criteria supply-demand network with capacity constraints in which all products and all criteria are simultaneously considered. We develop a result relating a strong vector equilibrium with Pareto-efficiency of the value set of the criteria function. The main attention is paid to converting a vector variational inequality problem to a scalar one. Applying two new functions called "augmented signed distance function" and "augmented biggest monotone function", we obtain a criterion for the existence of strong vector equilibrium and deduce a numerical method to solve our problem.

## Références

[1] M. Ciligor-Travain, *On Lagrange-Kuhn-Tucker multiplier for Pareto optimization problems*, Number. Func. Anal. and Optim, 15(1994), pp. 689-693.

[2] C. Gert and P. Weidner, *Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization*, J. Optim. Theory Appl. 67 (1990), pp. 297-320.

[3] C. J. Goh and X. Q. Yang, *Vector equilibrium problem and vector optimisation*, Eur. J. Oper. Res. 116 (1999), pp. 615-628.

[4] V. V. Gorokhovich, *Convex and Nonsmooth Problems of Vector Optimization*, Nauka i Tekhnika, Minsk, 1990.

[5] T. X. D. Ha, *The Ekeland variational principle for set-valued maps involving coderivatives*, J. Math. Anal. Appl., 286(2003), pp. 509-523.

[6] T. X. D. Ha, *Some criteria for error bounds in set optimization,* Optimization online(2012).

[7] J. B. Hiriart-Urruty, *New concepts in non-differentiable programming*, Bull. Soc. Math. France, 60(1979), pp. 57-85.

[8] I. V. Konnov, *Vector Network Equilibrium Problems with Elastic Demands*, J. Global Optim. DOI 10.1007/s 10898-011-9798-7.

[9] S.J. Li, K.L. Teo, and X.Q. Yang, *Vector Equilibrium Problems with Elastic Demands and Capacity Constraints*, J. Global Optim. Vol. 37, 2007, pp. 647-660.

[10] D.T. Luc, *Multi-Product Supply Demand Networks with Elementary Flows*, Acta Mathematica Vietnamica, Vol. 36, No. 2, 2011, pp. 299-317.

[11] D.T. Luc, Mateo Rocca and Melanie Papalia, *Equilibrium in A Vector Supply Demand Network with Capacity Constraints*, Applicable Analysis, Vol. 90, No. 6, June 2011, pp. 1029-1045.

[12] D.T. Luc, *Theory of Vector Optimisation*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1989.

[13] A. Nagurney, *Network Economics, A Variational Inequality Approach*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1999.

[14] M. A. Noor, *A Modified Projection Method for Monotone Variational Inequalities,* Applied Mathematics Letters(1999), 83-87.

[15] Michael V. Solodov, Paul Tseng, *Modified Projection-Type Method for Monotone Variational Inequalities,* SIAM J. Control and Optimization, Vol. 34, No. 5, pp. 1814-1830, September 1996.

# Discrete collapsing sandpile model

**TA Thi Nguyet Nga**
XLIM, Université de Limoges, France

**Noureddine Igbida**
XLIM, Université de Limoges, France

**Fahd Karami**
Université de Cadi Ayyad, Maroc

**Mots-clefs :** Optimisation, discrete model, collapsing

Our main goal is to introduce and study a discrete model for the collapsing of a pile of cubes. This is a typical example of Self-organized critical phenomena exhibited by a critical slop. We prove existence and uniqueness of the solution for the model. Then by dual argument we study the numerical computation of the solution and we present some numerical simulations.

## Références

[1] S. Dumont and N. Igbida, Back on a Dual Formulation for the Growing Sandpile Problem. *European Journal Appl. Math.* vol. 20, (2008) pp. 169-185

[2] S. Dumont and N. Igbida, On the collapsing sandpile problem, *Communications on Pure and Applied Analysis (CPAA),* Vo 10 (2), 625-638, 2011.

[3] L. Prigozhin, Variational model of sandpile growth. *Euro. J. Appl. Math.* , **7**, 225-236, 1996

[4] L. C. Evans, M. Feldman and R. F. Gariepy, Fast/Slow diffusion and collapsing sandpiles, *J. Differential Equations*, **137**:166-209, 1997.

# Single-directionality ou quand une multiapplication n'en est pas vraiment une

**Didier Aussel**
PROMES, Université de Perpignan

Il existe, dans la littérature, des résultats célébres concernant le caractère univoque des applications multivoques monotones. Nous souhaitons ici montrer comment des résultats similaires peuvent être obtenus, de façon très simple, pour les multiapplications quasimonotones.

## Références

[1] D. Aussel & Y. Garcia, *On extensions of the Kenderov's single-valuedness result*, (2012), soumis, 11 pp.

[2] D. Aussel & M. Fabian, *Single-directional properties of quasi-monotone operators*, soumis (2012), 11 pp.