

# Utilisation d'espaces de Sobolev fractionnaires en reconstruction tomographique d'objets binaires

M. Bergounioux & E. Trélat

MAPMO  
Université d'Orléans

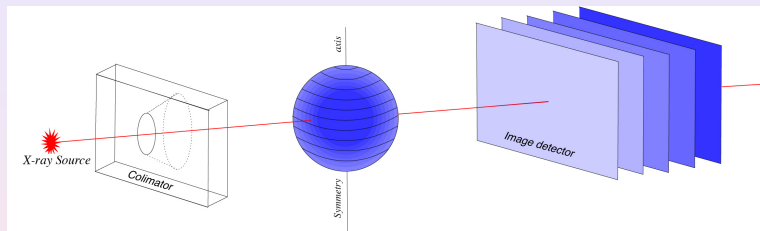
Journées du GDR - MOA  
Porquerolles 19-21 Octobre 2009

# Plan de l'exposé

- Dispositif expérimental
- L'opérateur de projection
- Formulation variationnelle

# Problème de reconstruction tomographique

Expérimentation physique (CEA Bruyères-le-Châtel) :  
étude du comportement d'un matériau lors d'un choc (explosion) .



Rayons X

Un seul cliché disponible (bruité et flouté).

**But** reconstruire l'objet.

Hypothèse :

l'objet est **binaire** et à **symétrie cylindrique**.

# Image synthétique

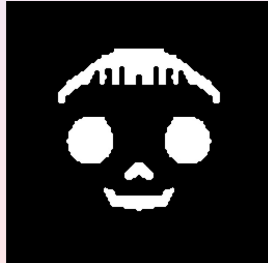
Objet binaire (noir et blanc) comportant :

- plusieurs trous déconnectés (en blanc) ;
- un petit trou sur l'axe de symétrie (où les détails sont les plus difficiles à restaurer) ;
- des détails encore plus petits au bord du trou du haut.

Coupe de l'objet dans un plan contenant l'axe de symétrie :



Zoom sur l'intérieur :



La radiographie mesure l'atténuation des rayons X à travers l'objet.

Sur la radio : coordonnées  $(y, z)$  où  $z$  correspond à l'axe de symétrie

Le flux au point  $(y, z)$  est :

$$I(y, z) = I_0 e^{-\int u(r, \theta, z) d\ell},$$

(intégrale le long du rayon)

$u$  : densité de l'objet

### Définition

L'opérateur de projection  $H_0$  est défini par :  $H_0 u = -\ln I/I_0 = \int u d\ell$ .

(Transformation de Radon)

## Hypothèse

Les rayons X sont parallèles et orthogonaux à l'axe de symétrie

Pour un objet 3D à symétrie cylindrique, représenté par le coefficient d'atténuation (proportionnel à sa densité)  $\tilde{u}(x, y, z)$ , on a

$$(H_0 \tilde{u})(y, z) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(x, y, z) dx.$$

En coordonnées **cylindriques**,  $\tilde{u}(x, y, z) = u(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$ , et

$$(H_0 u)(y, z) = 2 \int_{|y|}^{+\infty} u(r, z) \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}} dr.$$

De plus, l'image est dégradée par deux perturbations principales :

- un *flou*, dû à la réponse du détecteur et à la taille de l'émetteur :

$$Bu_d = K \star u_d,$$

où  $u_d$  est l'image projetée,  $K$  est un noyau symétrique, positif à support compact tel que  $\int K d\mu = 1$ .

- un *bruit* (blanc gaussien additif)  $\tau$ .

La projection observée d'un objet  $u$  est alors

$$v_d = BH_0u + \tau.$$

# L'opérateur de projection

## Premières propriétés

- $H_0 : BV(\Omega) \rightarrow BV(\Omega)$  est linéaire continu.  
 $\Omega \subset \tilde{\Omega} = [0, a) \times (-a, a)$
- $H_0 : L^p(\Omega) \rightarrow L^s(\tilde{\Omega})$  est un opérateur linéaire continu pour tout  $p \in [1, +\infty]$  et  $s$  tel que  $s \in [p, \frac{2p}{2-p})$  si  $1 \leq p \leq 2$ , et  $s \in [p, +\infty]$  si  $p > 2$



R. Abraham, M.B et E. Trélat, *A penalization approach for tomographic reconstruction of binary radially symmetric objects*, Applied Mathematics and Optimization, **58**, 3, (2008), 345–371.

- mais  $H_0^{-1}$  n'est jamais continu pour ces espaces !  
( $H_0^{-1} : H^1 \rightarrow L^\infty$ )

Conséquence : appliquer  $H_0^{-1}$  ne permet pas de reconstruire efficacement l'objet.

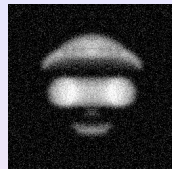




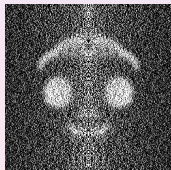
(a) Objet réel  $u$ .



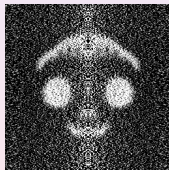
(b) Projection théorique  $H_0 u$ .



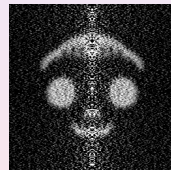
(c) Projection réelle  $v_d = BH_0 u + \tau$  avec flou et bruit "réalistes".



(d) Reconstruction  $H_0^{-1} v_d$  avec  $H_0^{-1}$  appliqué à la projection réelle.



(e) Résultat obtenu par rétroprojection filtrée (filtre de Ram-Lak).



(f) Résultat obtenu par rétroprojection filtrée (fenêtre de Hamming).

**FIGURE:** Comparaison de  $u$ ,  $H_0 u$ ,  $v_d = BH_0 u + \tau$ ,  $H_0^{-1} v_d$ , et des résultats de rétroprojection filtrée.

# L'opérateur de projection

$$(H_0 u)(y, z) = 2 \int_{|y|}^{+\infty} u(r, z) \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}} dr.$$

# L'opérateur de projection

$$(H_0 u)(y, z) = 2 \int_{|y|}^{+\infty} u(r, z) \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}} dr.$$

## Théorème 1

Pour tout  $u \in BV(\Omega)$  la fonction  $(z, y) \mapsto (H_0 u)(y, z)$  appartient à  $BV(\tilde{\Omega}) \cap L^1(-a, a; H^s(-a, a))$ , pour tout  $0 \leq s < 1$  et

$$\|H_0 u\|_{BV(\tilde{\Omega})} + \|H_0(u)\|_{L^1(-a, a; H^s(-a, a))} \leq C \|u\|_{BV(\Omega)}$$

De plus  $H_0$  est continu de  $X$  dans  $BV(\tilde{\Omega}) \cap L^1(-a, a; H^s(-a, a))$  pour

- $X = BV(\Omega)$
- $X = L^1(-a, a; BV(0, a))$  avec la norme  $\int_{-a}^a |Du_z|(0, a) dz$  où  $u_z : r \mapsto u(r, z)$  et  $|Du_z|(0, a)$  la variation totale de  $u_z$  sur  $[0, a]$ .

# Idée de la preuve

Pour tout  $s \in [0, 1]$ , l'espace  $H^s(-a, a)$  est l'espace des fonctions  $f \in L^2(-a, a)$  telles que

$$\|f\|_{H^s} := \left( \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s \mathcal{F}(f)(\xi)^2 d\xi \right)^{1/2} < +\infty,$$

où  $\mathcal{F}(f)$  est la transformée de Fourier de  $f$ . Pour  $r \in [1, 2]$

$$L^r(-a, a; H^s(-a, a)) := \left\{ u \mid \int_{-a}^a \|u(\cdot, z)\|_{H^s}^r dz < +\infty \right\}.$$

### Lemme 1

Pour tout  $u \in L^1(\Omega)$ , on a  $\|H_0 u\|_{L^1(\tilde{\Omega})} \leq 2\pi a \|u\|_{L^1(\Omega)}$ .

### Lemme 2

Il existe  $C_0 > 0$  tel que  $\|H_0 u\|_{BV(\tilde{\Omega})} \leq C_0 \|u\|_{BV(\Omega)}$ , pour tout  $u \in BV(\Omega)$ .

### Lemme 3

Soient  $a < b$  et  $c < d$  des réels et  $O = (a, b) \times (c, d)$ ; soit  $g \in BV(O)$ . Pour presque tout  $x \in (a, b)$ , la fonction marginale  $g^x : y \mapsto g(x, y)$  est à variation bornée sur  $(c, d)$ . De plus,  
 $|Dg|(O) \geq \int_a^b |Dg^x|(c, d) dx$ .

## Lemme 4

La transformée de Fourier de l'opérateur  $H_0$  par rapport à la première variable est

$$(\mathcal{F}_y H_0 u)(\xi, z) = 2\pi \int_0^a r u(r, z) J_0(2\pi \xi r) dr, \quad (1)$$

pour tous  $u \in L^1(\Omega)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  et  $z \in (-a, a)$ , où  $J_0$  est la fonction de Bessel de première espèce définie par

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(tx)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

## Lemme 5

Il existe  $C_2 > 0$  (ne dépendant que de  $a$ ) telle que pour tout  $u \in L^1(-a, a; BV(0, a))$

$$|(\mathcal{F}_y H_0 u)(\xi, z)| \leq \frac{C_2}{(1 + \xi^2)^{3/4}} (|u_z(a)| + \|u_z\|_{L^1(0, a)} + |Du_z|(0, a)), \quad (2)$$

pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$  et presque tout  $z \in (-a, a)$ .

## Théorème 2

Pour tout  $u \in L^2(-a, a, BV_0(0, a))$ , et pour tout  $s \in [0, 1[$  La fonction  $(z, y) \mapsto (H_0 u)(y, z)$  appartient à  $L^2(-a, a; H^s(-a, a))$  et

$$\|H_0(u)\|_{L^2(-a, a; H^s(-a, a))} \leq C(\|u\|_{L^2(-a, a; BV_0(0, a))})$$



# Approche variationnelle

$v_d$  est l'image observée (bruitée et floutée), et  $H = BH_0$ .

Problème de minimisation « classique »

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \min F(u), & \text{où } F(u) = \frac{1}{2} \|Hu - v_d\|_{L^2}^2 + \alpha J(u), \\ u \in BV(\Omega) \\ u(x) \in \{0, 1\} \text{ p.p. sur } \Omega, \end{cases}$$

avec

- $J(u)$  variation totale de  $u$  :

$$J(u) := \sup \left\{ \int_{\Omega} u(x) \operatorname{div} \varphi(x) \, dx \mid \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1 \right\}$$

- $\alpha > 0$ .

*Remarque* : ce problème possède au moins une solution.

## Modèle alternatif- 1

$$(\mathcal{P}_s^1) \quad \begin{cases} \min F(u), & \text{où } F(u) = \frac{1}{2} \|Hu - v_d\|_{X_s}^2 + \alpha J(u), \\ u \in BV(\Omega) \cap L^2(-a, a, BV(-a, a)), \\ \|u\|_{L^2(-a, a, BV(-a, a))} \leq R \\ u(x) \in \{0, 1\} \text{ p.p. sur } \Omega, \end{cases}$$

avec

- $X_s = L^2(-a, a; H^s(-a, a))$ ,  $0 \leq s < 1$ , (espace de Hilbert)
- $\alpha > 0$ .

## Modèle alternatif - 2

$$(\mathcal{P}_s^2) \quad \begin{cases} \min F(u), & \text{où } F(u) = \frac{1}{2} \|Hu - v_d\|_{X_s}^2 + \alpha \Phi(u), \\ u \in BV(\Omega) \cap L^2(-a, a, BV(-a, a)), \\ u(x) \in \{0, 1\} \text{ p.p. sur } \Omega, \end{cases}$$

avec

- $X_s = L^2(-a, a; H^s(-a, a))$ ,  $0 \leq s < 1$ , (espace de Hilbert)
- $\Phi(u) = \|u\|_{L^2(-a, a, BV(-a, a))}^2 = \int_{-a}^a |D_z u|^2 dz$  où  $|D_z u|$  est la variation totale de  $y \mapsto u(y, z)$  sur  $[-a, a]$ .
- $\alpha > 0$ .

**Théorème** : ce problème possède au moins une solution.