Sur un problème bien posé

Jean-Noël Corvellec

Université de Perpignan Via Domitia

Un résultat de Ricceri

Théorème *Soit X un espace de Hilbert, $f : X \to \mathbb{R}$ de classe $C^{1,1}$, et $x \in X$ tel que $f'(x) \neq 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $r \in]0, \delta[$ on a*

$$\inf_{B_r[x]} f = \inf_{S_r[x]} f \, ,$$

et le problème de minimiser f sur la sphère $S_r[x]$ est bien posé (au sens de Tychonoff). Également, le problème de minimiser f sur la boule (fermée) $B_r[x]$ est bien posé.

B. Ricceri, *The problem of minimizing locally a C^2 functional around non-critical points is well-posed*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 2187–2191.

J.-N. C. and R. Lucchetti, *A note on well-posed problems*, pré-publication 2009.

“Boundary well-posedness”

Définition Soit (X, d) un espace métrique, C un sous-ensemble fermé de X à frontière ∂C non vide, et $f : X \to \mathbb{R}$ semi-continue inférieurement (sci). On dit que (le problème de minimiser) f est “boundary well-posed” sur C si :

(i) Il existe $\bar{x} \in \partial C$ tel que $f(\bar{x}) = \inf_C f$;

(ii) Toute suite $(x_n) \subset C$ telle que $f(x_n) \to \inf_C f$ converge vers $\bar{x}$.

- Symétriquement : problème de maximisation de f scs.
- D’après (ii), $\bar{x}$ dans (i) est unique.
- Si f est “boundary well-posed” sur C alors le problème de minimiser la restriction de f à ∂C est bien posé au sens de Tychonoff.

d-points

(X, d) métrique, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Pour $x \in X$ on pose :

$$M_{f,d}(x) := \{z \in X :\ f(z) + d(z, x) \leq f(x)\} .$$

On dit que $y \in X$ est un d-point de f si $M_{f,d}(y) = \{y\}$.

Proposition (Principe variationnel d'Ekeland) *Soit $x \in X$ tel que : $M_{f,d}(x)$ est complet, f est sci, propre et minorée sur $M_{f,d}(x)$. Alors f a un d-point dans $M_{f,d}(x)$.*

$x_0 := x$; $x_n \in M_{f,d}(x_{n-1})$: $(M_{f,d}(x_n))$ est une suite décroissante (inégalité triangulaire) de fermés (f sci). En choisissant les x_n tels que $\varepsilon_n := f(x_n) - \inf\limits_{M_{f,d}(x_{n-1})} f \to 0$ (f propre et minorée), on a $M_{f,d}(x_n) \subset \bar{B}_{\varepsilon_n}(x_n)$, d'où :

$$\{y\} = \bigcap M_{f,d}(x_n) \supset M_{f,d}(y) .$$

Principe de borne d'erreur basique

Théorème (X, d) *métrique complet,* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *sci, propre et minorée. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(a) f *n'a pas de* d*-point dans* $X \setminus \operatorname{argmin} f$.

(b) *Pour tout* $x \in X \setminus \operatorname{argmin} f$ *il existe* $\bar{x} \in M_{f,d}(x) \cap \operatorname{argmin} f$.

En particulier :

$$(*) \quad f(x) - \inf_X f \geq d(x, \operatorname{argmin} f) \quad \textit{pour tout } x \in X\,.$$

- (a) $\Rightarrow$ (b) est un résultat d'existence de points de minimum, équivalent au principe d'Ekeland.
- $f \geq a$, sans d-point dans $[f{>}a]$. Alors $a = \inf f$, $\operatorname{argmin} f = [f{\leq}a] \neq \emptyset$, et $(*)$.

D. Azé and J.-N. C., *A variational method in fixed point results with inwardness conditions*, Proc. Amer. Math. Soc **134** (2006), 3577–3583.

Un second principe

(X, d) métrique, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $x \in \mathrm{dom} f$:

$$|\nabla f|(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est un minimum local de } f, \\ \displaystyle\limsup_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition (X, d) *complet,* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *sci,* $C \subset U \subset X$*,* C *fermé,* U *ouvert. Alors, pour tout* $x \in U \setminus C$ *:*

$$f(x) - \inf_{U \setminus C} f \geq \left(\inf_{U \setminus C} |\nabla f| \right) \min\{d(x, C), d(x, X \setminus U)\}.$$

E. De Giorgi, A. Marino, and M. Tosques, *Problemi di evoluzione in spazi metrici e curve di massima pendenza*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **68** (1980), 180–187.

Remarques

- $\forall x \in U \setminus C : \quad f(x) - \inf_{U\setminus C} f \geq \left(\inf_{U\setminus C} |\nabla f| \right) \min\{d(x,C), d(x, X\setminus U)\}\,.$

$\mu := \inf_{U\setminus C} f \in \mathbb{R}\,;\ x \in U \setminus C$ avec $f(x) \in \mathbb{R}$,

$r := \min\{d(x,C), d(x, X\setminus U)\}$, $\sigma > \frac{f(x)-\mu}{r}$.

$\tilde{d} := \sigma d$, $\tilde{f} := \max\{f, \mu\}$; $\tilde{f}$ a un $\tilde{d}$-point $y \in M_{\tilde{f},\tilde{d}}(x) \subset B_r(x) \subset U \setminus C$:

$$|\nabla f|(y) = |\nabla \tilde{f}|(y) = \sigma |\widetilde{\nabla} \tilde{f}|(y) \leq \sigma\,.$$

- En particulier, si $C = \emptyset$ alors $\quad f(x) - \inf_{U} f \geq \left(\inf_{U} |\nabla f| \right) d(x, X\setminus U) \quad$ pour $x \in U$;
- Si, de plus, $U = X$ et $\inf_X f \in \mathbb{R}$, alors $\quad \inf_X |\nabla f| = 0$.

J.-N. C. and V. V. Motreanu, *Nonlinear error bounds for lower semicontinuous functions on metric spaces*, Math Program. **114** (2008), 291–319.

D. Azé and J.-N. C., *On some variational properties of metric spaces*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 185–200.

Un corollaire

Corollaire (X,d) *complet,* V *un ouvert de* X *avec* $\partial V \neq \emptyset$*,* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *sci. On suppose :*

$$\inf_V f \in \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad \inf_V |\nabla f| > 0\,.$$

Soit (x_n) *une suite minimisante de la restriction de* f *à* $\overline{V}$*. Alors :*

$$d(x_n, \partial V) \to 0 \quad \textit{et} \quad \inf_{\overline{V}} f = \inf_{\partial V} f\,.$$

(Si $\inf_V f < b < \inf_{\partial V} f$, alors $V \cap [f \leq b]$ est à la fois ouvert et complet...)

Un résultat de perturbation abstrait

Théorème *(X,d) complet, $f : X \to \mathbb{R}$ sci, U un ouvert borné de X avec $\partial U \neq \emptyset$. On suppose :*

$$\inf_U |\nabla f| > 0\,.$$

Soit $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. On pose, pour $x \in X$:

$$\tilde{f}(x) := f(x) + \alpha(d(x, \partial U))\,.$$

Si $\tilde{f}$ est "boundary well-posed" sur $\overline{U}$ alors f l'est également.

f est minorée sur $\overline{U}$ ($\tilde{f}$ l'est, U est borné et α est continue). Soit (x_n) minimisante pour $f_{|\overline{U}}$.
D'après le Corollaire :

$$\tilde{f}(x_n) = f(x_n) + \alpha(d(x_n, \partial U)) \to \inf_{\partial U} f + \alpha(0) = \inf_{\partial U} \tilde{f} = \inf_{\overline{U}} \tilde{f}\,.$$

Un cas particulier

Théorème $(X, \|\cdot\|)$ *Banach réflexif,* $f : X \to \mathbb{R}$, $x \in X$, U *un voisinage convexe de* x*, avec*

$$\gamma := \inf_U |\nabla f| > 0 \,.$$

On suppose que $\|\cdot\|$ *est strictement convexe et a la propriété de Kadeč-Klee, et que pour un certain* $\kappa > 0$ *la fonction* $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\tilde{f}(y) := f(y) + \frac{\kappa}{2}\|y - x\|^2$$

est convexe sur U*.*
Alors il existe $\delta > 0$ *tel que pour tout* $r \in]0, \delta]$*,* f *est "boundary well-posed" sur* $B_r[x]$*.*

Démonstration

- Au besoin, on diminue U de façon que f soit lipschitzienne ($\tilde{f}$ convexe), donc minorée sur U. On peut aussi augmenter κ de façon que $\tilde{f}$ soit strictement convexe ($\|\cdot\|$ l'est) sur U.

- Soit $\delta \in]0, \gamma/\kappa[$ tel que $B_\delta[x] \subset U$. Pour $y, z \in B_\delta(x)$, $y \neq z$:

$$\frac{\tilde{f}(y) - \tilde{f}(z)}{\|y - z\|} \geq \frac{f(y) - f(z)}{\|y - z\|} - \frac{\kappa}{2}(\|y - x\| + \|z - x\|) \,, \qquad (\leq \Delta)$$

d'où : $\quad |\nabla \tilde{f}|(y) \geq |\nabla f|(y) - \kappa\|y - x\| \geq \gamma - \kappa\delta \ (> 0)\,.$

- Soit $r \in]0, \delta]$. Il existe un unique $x_r \in B_r[x]$ tel que $\tilde{f}(x_r) = \inf_{B_r[x]} \tilde{f}$, et si (x_n) est une suite minimisante de $\tilde{f}_{|B_r[x]}$, on a $x_n \rightharpoonup x_r$ (X réflexif, $\tilde{f}$ strictement convexe sur $B_r[x]$).

- Or, $\inf_{B_r(x)} |\nabla \tilde{f}| > 0$, donc $x_r \in S_r[x]$ et $\|x_n - x\| \to r = \|x_r - x\|$ (Corollaire). Donc $x_n \to x_r$ (propriété KK), et $\tilde{f}$ est “boundary well-posed” sur $B_r[x]$.

- On conclut avec le théorème précédent ($U := B_r(x)$, $\alpha(s) := \frac{\kappa}{2}(r - s)^2$).

Le résultat principal

X un espace de Banach. Une norme $\|\cdot\|$ sur X a un module de convexité de type quadratique s'il existe $a > 0$ tel que pour $\varepsilon \in [0, 2]$:

$$\inf \left\{ 1 - \frac{\|y+z\|}{2} \,:\, \|y\| = \|z\| = 1\,,\ \|y-z\| \geq \varepsilon \right\} \geq a\varepsilon^2\,.$$

Auquel cas : $(X, \|\cdot\|)$ est réflexif, $\|\cdot\|$ est strictement convexe et a la propriété de Kadeč-Klee.

Théorème $(X, \|\cdot\|)$ *Banach,* $f : X \to \mathbb{R}$ *de classe* $C^{1,1}$*,* $x \in X$ *tel que* $f'(x) \neq 0$*. On suppose que* $\|\cdot\|$ *a un module de convexité de type quadratique. Il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $r \in]0, \delta]$ *le problème de minimiser (resp., maximiser)* f *est "boundary well-posed" sur* $B_r[x]$.

Démonstration

- Proposition *Une norme $\|\cdot\|$ sur un espace vectoriel X a un module de convexité de type quadratique si et seulement si elle vérifie la loi faible du parallélogramme :*

$$\exists\, b > 0\,,\ \forall\, y, z \in X\ :\quad 2(\|y\|^2 + \|z\|^2) - \|y+z\|^2 \geq b\|y-z\|^2.$$

- Rappelons que $|\nabla f| = \|f'(\cdot)\|_*$. Soit U un voisinage convexe de x et $\kappa_0 > 0$ tels que $\inf_{y\in U} \|f'(y)\|_* > 0$ et f' est κ_0-lipschitzienne sur U.

- On peut supposer que $x = 0$ (translation). Soit $y, z \in U$, $u := \dfrac{y+z}{2}$, $v := \dfrac{y-z}{2}$. Alors :

$$|f(y) + f(z) - 2f(u)| \leq \int_0^1 |f'(u+tv) - f'(z+tv)|\|v\|dt \leq \frac{\kappa_0}{4}\|y-z\|^2\,,$$

d'où, avec $\kappa := \frac{\kappa_0}{b}$:

$$\left|\frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(z) - f\left(\frac{y+z}{2}\right)\right| \leq \frac{\kappa}{2}\left(\frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|z\|^2 - \left\|\frac{y+z}{2}\right\|^2\right)\,, \qquad \text{(lfp)}$$

ce qui montre que les fonctions (continues) $f + \frac{\kappa}{2}\|\cdot\|^2$ et $-f + \frac{\kappa}{2}\|\cdot\|^2$ sont convexes sur U.

Conclusion

- La norme canonique des espaces L^p a un module de convexité de type quadratique si (et seulement si, par dualité) $p \in]1, 2]$ (Hanner, 1956).

- W. L. Bynum, *Weak parallelogram laws for Banach spaces*, Canad. Math. Bull. **19** (1976), 269–275.

- Dans la lfp, on a $b \leq 1$. Le cas hilbertien est $b = 1$, auquel cas la convexité de $\pm f + \frac{\kappa}{2}\|\cdot\|^2$ est immédiate.

- J. Duda, L. Veselý, and L. Zajíček, *On d.c. functions and mappings*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **51** (2003), 111–138.

- J.-B. Hiriart-Urruty and P. Plazanet, *Moreau's decomposition theorem revisited*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **6** (1989), 325–338 :

$$\pm f + \frac{\kappa}{2}\|\cdot\|^2 \text{ convexes sur } X \text{ Hilbert} \implies f \text{ est différentiable avec } f' \ \kappa\text{-lipschitzienne.}$$

- R. Lucchetti, Convexity and Well-Posed Problems, Ouvrages de Mathématiques de la SMC, **22**. Springer, New York, 2006. xiv+305 pp.