Dérivées des distances géodésiques par rapport à la métrique : Fast Marching et applications.

Filippo Santambrogio

Université Paris-Dauphine,
filippo@ceremade.dauphine.fr

GdR MOA
Porquerolles
19 octobre 2009

1. En continu
   - Distances et équation Eikonale
   - Quand on dérive les géodésiques apparaissent
2. Exemple d'applications
   - Ralentissement de l'ennemi
   - Équilibre en congestion de trafic
   - Tomographie
3. Discrétisation
   - FMM
   - Calcul des dérivées

1. En continu
   - Distances et équation Eikonale
   - Quand on dérive les géodésiques apparaissent
2. Exemple d'applications
   - Ralentissement de l'ennemi
   - Équilibre en congestion de trafic
   - Tomographie
3. Discrétisation
   - FMM
   - Calcul des dérivées

1. En continu
   - Distances et équation Eikonale
   - Quand on dérive les géodésiques apparaissent
2. Exemple d'applications
   - Ralentissement de l'ennemi
   - Équilibre en congestion de trafic
   - Tomographie
3. Discrétisation
   - FMM
   - Calcul des dérivées

1. En continu
   - Distances et équation Eikonale
   - Quand on dérive les géodésiques apparaissent
2. Exemple d'applications
   - Ralentissement de l'ennemi
   - Équilibre en congestion de trafic
   - Tomographie
3. Discrétisation
   - FMM
   - Calcul des dérivées

1. En continu
   - Distances et équation Eikonale
   - Quand on dérive les géodésiques apparaissent
2. Exemple d'applications
   - Ralentissement de l'ennemi
   - Équilibre en congestion de trafic
   - Tomographie
3. Discrétisation
   - FMM
   - Calcul des dérivées

Distances géodésiques

Soit $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^+$ une fonction donnée (métrique). La distance d_ξ est définie par

$$d_\xi(x,y) := \inf_{\gamma(0)=x,\ \gamma(1)=y} \int_0^1 \xi(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Comme dans une **métrique Riemanienne conforme** (isotrope).
Si $x = x_0$ est fixé on note $\mathcal{U}_{x_0,\xi}(y) := d_\xi(x_0, y)$: cette fonction est une solution de viscosité de l'équation Eikonale

$$|\nabla \mathcal{U}| = \xi, \quad \mathcal{U}(x_0) = 0.$$

Question : comment $\mathcal{U}_\xi$ dépende-t-elle de ξ ?

Distances géodésiques

Soit $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^+$ une fonction donnée (métrique). La distance d_ξ est définie par

$$d_\xi(x,y) := \inf_{\gamma(0)=x,\ \gamma(1)=y} \int_0^1 \xi(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Comme dans une **métrique Riemanienne** **conforme** (isotrope).
Si $x = x_0$ est fixé on note $\mathcal{U}_{x_0,\xi}(y) := d_\xi(x_0, y)$: cette fonction est une solution de viscosité de l'équation Eikonale

$$|\nabla \mathcal{U}| = \xi, \quad \mathcal{U}(x_0) = 0.$$

Question : comment $\mathcal{U}_\xi$ dépende-t-elle de ξ ?

Distances géodésiques

Soit $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^+$ une fonction donnée (métrique). La distance d_ξ est définie par

$$d_\xi(x,y) := \inf_{\gamma(0)=x,\ \gamma(1)=y} \int_0^1 \xi(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Comme dans une **métrique Riemanienne conforme** (isotrope).
Si $x = x_0$ est fixé on note $\mathcal{U}_{x_0,\xi}(y) := d_\xi(x_0, y)$: cette fonction est une solution de viscosité de l'équation Eikonale

$$|\nabla \mathcal{U}| = \xi, \quad \mathcal{U}(x_0) = 0.$$

Question : comment $\mathcal{U}_\xi$ dépende-t-elle de ξ ?

Distances géodésiques

Soit $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^+$ une fonction donnée (métrique). La distance d_ξ est définie par

$$d_\xi(x, y) := \inf_{\gamma(0)=x,\ \gamma(1)=y} \int_0^1 \xi(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Comme dans une **métrique Riemanienne conforme** (isotrope).
Si $x = x_0$ est fixé on note $\mathcal{U}_{x_0,\xi}(y) := d_\xi(x_0, y)$: cette fonction est une solution de viscosité de l'équation Eikonale

$$|\nabla \mathcal{U}| = \xi, \quad \mathcal{U}(x_0) = 0.$$

Question : comment $\mathcal{U}_\xi$ dépende-t-elle de ξ ?

Distances géodésiques

Soit $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^+$ une fonction donnée (métrique). La distance d_ξ est définie par

$$d_\xi(x,y) := \inf_{\gamma(0)=x,\ \gamma(1)=y} \int_0^1 \xi(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Comme dans une **métrique Riemanienne conforme** (isotrope).
Si $x = x_0$ est fixé on note $\mathcal{U}_{x_0,\xi}(y) := d_\xi(x_0, y)$: cette fonction est une solution de viscosité de l'équation Eikonale

$$|\nabla \mathcal{U}| = \xi, \quad \mathcal{U}(x_0) = 0.$$

Question : comment $\mathcal{U}_\xi$ dépende-t-elle de ξ ?

Distances géodésiques

Soit $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^+$ une fonction donnée (métrique). La distance d_ξ est définie par

$$d_\xi(x,y) := \inf_{\gamma(0)=x,\ \gamma(1)=y} \int_0^1 \xi(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Comme dans une **métrique Riemanienne conforme** (isotrope).
Si $x = x_0$ est fixé on note $\mathcal{U}_{x_0,\xi}(y) := d_\xi(x_0, y)$: cette fonction est une solution de viscosité de l'équation Eikonale

$$|\nabla \mathcal{U}| = \xi, \quad \mathcal{U}(x_0) = 0.$$

Question : comment $\mathcal{U}_\xi$ dépende-t-elle de ξ ?

Distances géodésiques

Soit $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^+$ une fonction donnée (métrique). La distance d_ξ est définie par

$$d_\xi(x,y) := \inf_{\gamma(0)=x,\ \gamma(1)=y} \int_0^1 \xi(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Comme dans une **métrique Riemanienne conforme** (isotrope).
Si $x = x_0$ est fixé on note $\mathcal{U}_{x_0,\xi}(y) := d_\xi(x_0, y)$: cette fonction est une solution de viscosité de l'équation Eikonale

$$|\nabla \mathcal{U}| = \xi, \quad \mathcal{U}(x_0) = 0.$$

Question : comment $\mathcal{U}_\xi$ dépende-t-elle de ξ ?

Distances géodésiques

Soit $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^+$ une fonction donnée (métrique). La distance d_ξ est définie par

$$d_\xi(x,y) := \inf_{\gamma(0)=x,\ \gamma(1)=y} \int_0^1 \xi(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Comme dans une **métrique Riemanienne conforme** (isotrope).
Si $x = x_0$ est fixé on note $\mathcal{U}_{x_0,\xi}(y) := d_\xi(x_0, y)$: cette fonction est une solution de viscosité de l'équation Eikonale

$$|\nabla \mathcal{U}| = \xi, \quad \mathcal{U}(x_0) = 0.$$

Question : comment $\mathcal{U}_\xi$ dépende-t-elle de ξ ?

Concavité, dérivée et sous-gradients

En tant qu'infimum de quantités linéaires, $\xi \mapsto d_\xi(x_0, y_0)$ est évidemment une fonction concave.

Si ξ est remplacé par $\xi + \varepsilon h$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) = \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt$$

le long d'une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ (par rapport à ξ). Laquelle ? celle qui minimise cette intégrale de h.

Pour tout géodésique σ entre x_0 et y, on a plus précisément

$$\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) \le \mathcal{U}_{x_0,\xi}(y) + \varepsilon \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt,$$

on a donc un élémént du **sous-gradient** (sur-gradient).

Concavité, dérivée et sous-gradients

En tant qu'infimum de quantités linéaires, $\xi \mapsto d_\xi(x_0, y_0)$ est évidemment une fonction concave.
Si ξ est remplacé par $\xi + \varepsilon h$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) = \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt$$

le long d'une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ (par rapport à ξ). Laquelle ? celle qui minimise cette intégrale de h.

Pour tout géodésique σ entre x_0 et y, on a plus précisément

$$\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) \leq \mathcal{U}_{x_0,\xi}(y) + \varepsilon \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt,$$

on a donc un élémént du **sous-gradient** (sur-gradient).

Concavité, dérivée et sous-gradients

En tant qu'infimum de quantités linéaires, $\xi \mapsto d_\xi(x_0, y_0)$ est évidemment une fonction concave.
Si ξ est remplacé par $\xi + \varepsilon h$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) = \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt$$

le long d'une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ (par rapport à ξ). Laquelle ? celle qui minimise cette intégrale de h.

Pour tout géodésique σ entre x_0 et y, on a plus précisément

$$\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) \leq \mathcal{U}_{x_0,\xi}(y) + \varepsilon \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt,$$

on a donc un élémént du **sous-gradient** (sur-gradient).

Concavité, dérivée et sous-gradients

En tant qu'infimum de quantités linéaires, $\xi \mapsto d_\xi(x_0, y_0)$ est évidemment une fonction concave.
Si ξ est remplacé par $\xi + \varepsilon h$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) = \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt$$

le long d'une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ (par rapport à ξ). Laquelle ? celle qui minimise cette intégrale de h.

Pour tout géodésique σ entre x_0 et y, on a plus précisément

$$\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) \leq \mathcal{U}_{x_0,\xi}(y) + \varepsilon \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt,$$

on a donc un élémént du **sous-gradient** (sur-gradient).

Concavité, dérivée et sous-gradients

En tant qu'infimum de quantités linéaires, $\xi \mapsto d_\xi(x_0, y_0)$ est évidemment une fonction concave.
Si ξ est remplacé par $\xi + \varepsilon h$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) = \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt$$

le long d'une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ (par rapport à ξ). Laquelle ? celle qui minimise cette intégrale de h.

Pour tout géodésique σ entre x_0 et y, on a plus précisément

$$\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) \le \mathcal{U}_{x_0,\xi}(y) + \varepsilon \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt,$$

on a donc un élément du **sous-gradient** (sur-gradient).

Concavité, dérivée et sous-gradients

En tant qu'infimum de quantités linéaires, $\xi \mapsto d_\xi(x_0, y_0)$ est évidemment une fonction concave.
Si ξ est remplacé par $\xi + \varepsilon h$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) = \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt$$

le long d'une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ (par rapport à ξ). Laquelle ? celle qui minimise cette intégrale de h.

Pour tout géodésique σ entre x_0 et y, on a plus précisément

$$\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) \leq \mathcal{U}_{x_0,\xi}(y) + \varepsilon \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt,$$

on a donc un élémént du **sous-gradient** (sur-gradient).

Concavité, dérivée et sous-gradients

En tant qu'infimum de quantités linéaires, $\xi \mapsto d_\xi(x_0, y_0)$ est évidemment une fonction concave.
Si ξ est remplacé par $\xi + \varepsilon h$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) = \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt$$

le long d'une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ (par rapport à ξ). Laquelle ? celle qui minimise cette intégrale de h.

Pour tout géodésique σ entre x_0 et y, on a plus précisément

$$\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) \leq \mathcal{U}_{x_0,\xi}(y) + \varepsilon \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\,dt,$$

on a donc un élément du **sous-gradient** (sur-gradient).

Concavité, dérivée et sous-gradients

En tant qu'infimum de quantités linéaires, $\xi \mapsto d_\xi(x_0, y_0)$ est évidemment une fonction concave.
Si ξ est remplacé par $\xi + \varepsilon h$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) = \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\, dt$$

le long d'une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ (par rapport à ξ). Laquelle ? celle qui minimise cette intégrale de h.

Pour tout géodésique σ entre x_0 et y, on a plus précisément

$$\mathcal{U}_{x_0,\xi+\varepsilon h}(y) \le \mathcal{U}_{x_0,\xi}(y) + \varepsilon \int_0^1 h(\sigma_{x_0,y}(t))|\sigma'_{x_0,y}(t)|\, dt,$$

on a donc un élément du **sous-gradient** (sur-gradient).

Pourquoi voudrait-on calculer des dérivées par rapport à ξ ?

Ben, évidemment, pour résoudre des problèmes d'optimisation qui font intervenir les distances d_ξ.

Pour écrire des conditions d'optimalité. . .ou pour appliquer un **algorithme de descente de gradient.**

Mais sinon on peut utiliser ces dérivées pour des problèmes d'évolution de métriques, par exemple.

Pourquoi voudrait-on calculer des dérivées par rapport à ξ ?

Ben, évidemment, pour résoudre des problèmes d'optimisation qui font intervenir les distances d_ξ.

Pour écrire des conditions d'optimalité. . .ou pour appliquer un **algorithme de descente de gradient.**

Mais sinon on peut utiliser ces dérivées pour des problèmes d'évolution de métriques, par exemple.

Pourquoi voudrait-on calculer des dérivées par rapport à ξ ?

Ben, évidemment, pour résoudre des problèmes d'optimisation qui font intervenir les distances d_ξ.

Pour écrire des conditions d'optimalité. . .ou pour appliquer un **algorithme de descente de gradient.**

Mais sinon on peut utiliser ces dérivées pour des problèmes d'évolution de métriques, par exemple.

Pourquoi voudrait-on calculer des dérivées par rapport à ξ ?

Ben, évidemment, pour résoudre des problèmes d'optimisation qui font intervenir les distances d_ξ.

Pour écrire des conditions d'optimalité. . .ou pour appliquer un **algorithme de descente de gradient.**

Mais sinon on peut utiliser ces dérivées pour des problèmes d'évolution de métriques, par exemple.

Ce qu'on appelle "les applications militaires"

Un problème posé par Buttazzo et al. : chercher la métrique optimale ξ qui ralentisse l'avancé d'un ennemi placé en y_0 qui vient nous attaquer en x_0 (sous des contraintes opportunes) :

$$\max\left\{d_\xi(x_0, y_0),\ \int \xi \leq M,\ a \leq \xi \leq b\right\}.$$

Si $a = 0$ et Ω est suffisamment grand la solution est obtenue en mettant $\xi = b$ sur deux boules autour de x_0 et y_0 et 0 ailleurs. Et si $a > 0$?

G. Buttazzo, A. Davini, I. Fragalà and F. Maciá, Optimal Riemannian distances preventing mass tranfer, *J. Reine Angew. Math.*, 2004.

Ce qu'on appelle "les applications militaires"

Un problème posé par Buttazzo et al. : chercher la métrique optimale ξ qui ralentisse l'avancé d'un ennemi placé en y_0 qui vient nous attaquer en x_0 (sous des contraintes opportunes) :

$$\max\left\{d_\xi(x_0, y_0),\ \int \xi \leq M,\ a \leq \xi \leq b\right\}.$$

Si $a = 0$ et Ω est suffisamment grand la solution est obtenue en mettant $\xi = b$ sur deux boules autour de x_0 et y_0 et 0 ailleurs. Et si $a > 0$?

G. Buttazzo, A. Davini, I. Fragalà and F. Maciá, Optimal Riemannian distances preventing mass tranfer, *J. Reine Angew. Math.*, 2004.

Ce qu'on appelle "les applications militaires"

Un problème posé par Buttazzo et al. : chercher la métrique optimale ξ qui ralentisse l'avancé d'un ennemi placé en y_0 qui vient nous attaquer en x_0 (sous des contraintes opportunes) :

$$\max\left\{d_\xi(x_0, y_0),\ \int \xi \leq M,\ a \leq \xi \leq b\right\}.$$

Si $a = 0$ et Ω est suffisamment grand la solution est obtenue en mettant $\xi = b$ sur deux boules autour de x_0 et y_0 et 0 ailleurs. Et si $a > 0$?

G. Buttazzo, A. Davini, I. Fragalà and F. Maciá, Optimal Riemannian distances preventing mass tranfer, *J. Reine Angew. Math.*, 2004.

Ce qu'on appelle "les applications militaires"

Un problème posé par Buttazzo et al. : chercher la métrique optimale ξ qui ralentisse l'avancé d'un ennemi placé en y_0 qui vient nous attaquer en x_0 (sous des contraintes opportunes) :

$$\max\left\{d_\xi(x_0,y_0),\ \int\xi\leq M,\ a\leq\xi\leq b\right\}.$$

Si $a=0$ et Ω est suffisamment grand la solution est obtenue en mettant $\xi=b$ sur deux boules autour de x_0 et y_0 et 0 ailleurs. Et si $a>0$?

G. Buttazzo, A. Davini, I. Fragalà and F. Maciá, Optimal Riemannian distances preventing mass tranfer, *J. Reine Angew. Math.*, 2004.

Ce qu'on appelle "les applications militaires"

Un problème posé par Buttazzo et al. : chercher la métrique optimale ξ qui ralentisse l'avancé d'un ennemi placé en y_0 qui vient nous attaquer en x_0 (sous des contraintes opportunes) :

$$\max\left\{d_\xi(x_0,y_0),\ \int\xi\le M,\ a\le\xi\le b\right\}.$$

Si $a=0$ et Ω est suffisamment grand la solution est obtenue en mettant $\xi=b$ sur deux boules autour de x_0 et y_0 et 0 ailleurs. Et si $a>0$?

G. Buttazzo, A. Davini, I. Fragalà and F. Maciá, Optimal Riemannian distances preventing mass tranfer, *J. Reine Angew. Math.*, 2004.

Ce qu'on appelle "les applications militaires"

Un problème posé par Buttazzo et al. : chercher la métrique optimale ξ qui ralentisse l'avancé d'un ennemi placé en y_0 qui vient nous attaquer en x_0 (sous des contraintes opportunes) :

$$\max\left\{d_\xi(x_0,y_0),\ \int \xi \leq M,\ a \leq \xi \leq b\right\}.$$

Si $a = 0$ et Ω est suffisamment grand la solution est obtenue en mettant $\xi = b$ sur deux boules autour de x_0 et y_0 et 0 ailleurs. Et si $a > 0$?

G. Buttazzo, A. Davini, I. Fragalà and F. Maciá, Optimal Riemannian distances preventing mass tranfer, *J. Reine Angew. Math.*, 2004.

Ce qu'on appelle "les applications militaires"

Un problème posé par Buttazzo et al. : chercher la métrique optimale ξ qui ralentisse l'avancé d'un ennemi placé en y_0 qui vient nous attaquer en x_0 (sous des contraintes opportunes) :

$$\max\left\{d_\xi(x_0,y_0),\ \int\xi\leq M,\ a\leq\xi\leq b\right\}.$$

Si $a=0$ et Ω est suffisamment grand la solution est obtenue en mettant $\xi=b$ sur deux boules autour de x_0 et y_0 et 0 ailleurs. Et si $a>0$?

G. Buttazzo, A. Davini, I. Fragalà and F. Maciá, Optimal Riemannian distances preventing mass tranfer, *J. Reine Angew. Math.*, 2004.

Congestion de trafic

Si Q est une repartition des agents (m_i d'entre eux devant se rendre de x_i à y_i) sur les différents chemins dans Ω, ce Q engendre une métrique ξ_Q à cause des différentes intensités de trafic aux différents endroits. Mais ceci donne lieu à des géodésiques qui dépendent de ξ_Q et donc à une nouvelle repartition Q' sur les chemins. On dit que ξ est une métrique d'équilibre **(équilibre de Wardrop)** si $\xi = \xi_Q$ avec $Q = Q'$.

Il se trouve que ξ est un équilibre si et seulement si elle résout

$$\max\Big\{\sum_i m_i d_\xi(x_i, y_i) - \int H(\xi),\ \xi \geq 0\Big\},$$

où H est une pénalisation qui dépende de la manière dont l'intensité de trafic influence la métrique.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria, *Net. Het. Media*, 2009.

Congestion de trafic

Si Q est une repartition des agents (m_i d'entre eux devant se rendre de x_i à y_i) sur les différents chemins dans Ω, ce Q engendre une métrique ξ_Q à cause des différentes intensités de trafic aux différents endroits. Mais ceci donne lieu à des géodésiques qui dépendent de ξ_Q et donc à une nouvelle repartition Q' sur les chemins. On dit que ξ est une métrique d'équilibre **(équilibre de Wardrop)** si $\xi = \xi_Q$ avec $Q = Q'$.

Il se trouve que ξ est un équilibre si et seulement si elle résout

$$\max\Big\{\sum_i m_i d_\xi(x_i, y_i) - \int H(\xi),\ \xi \geq 0\Big\},$$

où H est une pénalisation qui dépende de la manière dont l'intensité de trafic influence la métrique.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria, *Net. Het. Media*, 2009.

Congestion de trafic

Si Q est une repartition des agents (m_i d'entre eux devant se rendre de x_i à y_i) sur les différents chemins dans Ω, ce Q engendre une métrique ξ_Q à cause des différentes intensités de trafic aux différents endroits. Mais ceci donne lieu à des géodésiques qui dépendent de ξ_Q et donc à une nouvelle repartition Q' sur les chemins. On dit que ξ est une métrique d'équilibre **(équilibre de Wardrop)** si $\xi = \xi_Q$ avec $Q = Q'$.

Il se trouve que ξ est un équilibre si et seulement si elle résout

$$\max \Big\{ \sum_i m_i d_\xi(x_i, y_i) - \int H(\xi),\ \xi \geq 0 \Big\},$$

où H est une pénalisation qui dépende de la manière dont l'intensité de trafic influence la métrique.

F. BENMANSOUR, G. CARLIER, G. PEYRÉ AND F. SANTAMBROGIO, Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria, *Net. Het. Media*, 2009.

Congestion de trafic

Si Q est une repartition des agents (m_i d'entre eux devant se rendre de x_i à y_i) sur les différents chemins dans Ω, ce Q engendre une métrique ξ_Q à cause des différentes intensités de trafic aux différents endroits. Mais ceci donne lieu à des géodésiques qui dépendent de ξ_Q et donc à une nouvelle repartition Q' sur les chemins. On dit que ξ est une métrique d'équilibre **(équilibre de Wardrop)** si $\xi = \xi_Q$ avec $Q = Q'$.

Il se trouve que ξ est un équilibre si et seulement si elle résout

$$\max \Big\{ \sum_i m_i d_\xi(x_i, y_i) - \int H(\xi),\ \xi \geq 0 \Big\},$$

où H est une pénalisation qui dépende de la manière dont l'intensité de trafic influence la métrique.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria, *Net. Het. Media*, 2009.

Congestion de trafic

Si Q est une repartition des agents (m_i d'entre eux devant se rendre de x_i à y_i) sur les différents chemins dans Ω, ce Q engendre une métrique ξ_Q à cause des différentes intensités de trafic aux différents endroits. Mais ceci donne lieu à des géodésiques qui dépendent de ξ_Q et donc à une nouvelle repartition Q' sur les chemins. On dit que ξ est une métrique d'équilibre **(équilibre de Wardrop)** si $\xi = \xi_Q$ avec $Q = Q'$.

Il se trouve que ξ est un équilibre si et seulement si elle résout

$$\max\Big\{\sum_i m_i d_\xi(x_i, y_i) - \int H(\xi),\ \xi \geq 0\Big\},$$

où H est une pénalisation qui dépende de la manière dont l'intensité de trafic influence la métrique.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria, *Net. Het. Media*, 2009.

Congestion de trafic

Si Q est une repartition des agents (m_i d'entre eux devant se rendre de x_i à y_i) sur les différents chemins dans Ω, ce Q engendre une métrique ξ_Q à cause des différentes intensités de trafic aux différents endroits. Mais ceci donne lieu à des géodésiques qui dépendent de ξ_Q et donc à une nouvelle repartition Q' sur les chemins. On dit que ξ est une métrique d'équilibre **(équilibre de Wardrop)** si $\xi = \xi_Q$ avec $Q = Q'$.

Il se trouve que ξ est un équilibre si et seulement si elle résout

$$\max\Big\{\sum_i m_i d_\xi(x_i, y_i) - \int H(\xi),\ \xi \geq 0\Big\},$$

où H est une pénalisation qui dépende de la manière dont l'intensité de trafic influence la métrique.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria, *Net. Het. Media*, 2009.

Congestion de trafic

Si Q est une repartition des agents (m_i d'entre eux devant se rendre de x_i à y_i) sur les différents chemins dans Ω, ce Q engendre une métrique ξ_Q à cause des différentes intensités de trafic aux différents endroits. Mais ceci donne lieu à des géodésiques qui dépendent de ξ_Q et donc à une nouvelle repartition Q' sur les chemins. On dit que ξ est une métrique d'équilibre **(équilibre de Wardrop)** si $\xi = \xi_Q$ avec $Q = Q'$.

Il se trouve que ξ est un équilibre si et seulement si elle résout

$$\max\Big\{\sum_i m_i d_\xi(x_i, y_i) - \int H(\xi),\ \xi \geq 0\Big\},$$

où H est une pénalisation qui dépende de la manière dont l'intensité de trafic influence la métrique.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria, *Net. Het. Media*, 2009.

Congestion de trafic

Si Q est une repartition des agents (m_i d'entre eux devant se rendre de x_i à y_i) sur les différents chemins dans Ω, ce Q engendre une métrique ξ_Q à cause des différentes intensités de trafic aux différents endroits. Mais ceci donne lieu à des géodésiques qui dépendent de ξ_Q et donc à une nouvelle repartition Q' sur les chemins. On dit que ξ est une métrique d'équilibre **(équilibre de Wardrop)** si $\xi = \xi_Q$ avec $Q = Q'$.

Il se trouve que ξ est un équilibre si et seulement si elle résout

$$\max\Big\{\sum_i m_i d_\xi(x_i, y_i) - \int H(\xi),\ \xi \geq 0\Big\},$$

où H est une pénalisation qui dépende de la manière dont l'intensité de trafic influence la métrique.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria, *Net. Het. Media*, 2009.

Congestion de trafic

Si Q est une repartition des agents (m_i d'entre eux devant se rendre de x_i à y_i) sur les différents chemins dans Ω, ce Q engendre une métrique ξ_Q à cause des différentes intensités de trafic aux différents endroits. Mais ceci donne lieu à des géodésiques qui dépendent de ξ_Q et donc à une nouvelle repartition Q' sur les chemins. On dit que ξ est une métrique d'équilibre **(équilibre de Wardrop)** si $\xi = \xi_Q$ avec $Q = Q'$.

Il se trouve que ξ est un équilibre si et seulement si elle résout

$$\max\Big\{\sum_i m_i d_\xi(x_i, y_i) - \int H(\xi),\ \xi \geq 0\Big\},$$

où H est une pénalisation qui dépende de la manière dont l'intensité de trafic influence la métrique.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria, *Net. Het. Media*, 2009.

Congestion de trafic

Si Q est une repartition des agents (m_i d'entre eux devant se rendre de x_i à y_i) sur les différents chemins dans Ω, ce Q engendre une métrique ξ_Q à cause des différentes intensités de trafic aux différents endroits. Mais ceci donne lieu à des géodésiques qui dépendent de ξ_Q et donc à une nouvelle repartition Q' sur les chemins. On dit que ξ est une métrique d'équilibre **(équilibre de Wardrop)** si $\xi = \xi_Q$ avec $Q = Q'$.

Il se trouve que ξ est un équilibre si et seulement si elle résout

$$\max \Big\{ \sum_i m_i d_\xi(x_i, y_i) - \int H(\xi),\ \xi \geq 0 \Big\},$$

où H est une pénalisation qui dépende de la manière dont l'intensité de trafic influence la métrique.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria, *Net. Het. Media*, 2009.

Congestion de trafic

Si Q est une repartition des agents (m_i d'entre eux devant se rendre de x_i à y_i) sur les différents chemins dans Ω, ce Q engendre une métrique ξ_Q à cause des différentes intensités de trafic aux différents endroits. Mais ceci donne lieu à des géodésiques qui dépendent de ξ_Q et donc à une nouvelle repartition Q' sur les chemins. On dit que ξ est une métrique d'équilibre **(équilibre de Wardrop)** si $\xi = \xi_Q$ avec $Q = Q'$.

Il se trouve que ξ est un équilibre si et seulement si elle résout

$$\max \Big\{ \sum_i m_i d_\xi(x_i, y_i) - \int H(\xi),\ \xi \geq 0 \Big\},$$

où H est une pénalisation qui dépende de la manière dont l'intensité de trafic influence la métrique.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria, *Net. Het. Media*, 2009.

Travel-time tomography

Dans une "boite" $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ il y a un matériau inconnu et des ondes (lumière, son...) se propagent dans Ω assujetties à une métrique ξ qui dépend du matériau. On mésure des temps de parcours $t_{i,j}$ entre des sources x_i et des capteurs y_j dans $\Omega \cup \partial\Omega$. On cherche à retrouver ξ. Une possibilité : résoudre

$$\min \sum_{i,j} (t_{i,j} - d_\xi(x_i, y_j))^2 + A \int |\nabla \xi|^p + B \int W(\xi).$$

Le terme en gradient est là pour régulariser et selectionner une solution (et garantir des résultats d'existence si $p > d$) ; W peut être un double puits si jamais on sait qu'il n'y a que deux types de matériau dans Ω.
Problème : ce problème est non-convexe.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Fast Marching Derivatives with Respect to Metrics and Applications, preprint

Travel-time tomography

Dans une "boite" $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ il y a un matériau inconnu et des ondes (lumière, son...) se propagent dans Ω assujetties à une métrique ξ qui dépend du matériau. On mésure des temps de parcours $t_{i,j}$ entre des sources x_i et des capteurs y_j dans $\Omega \cup \partial\Omega$. On cherche à retrouver ξ. Une possibilité : résoudre

$$\min \sum_{i,j} (t_{i,j} - d_\xi(x_i, y_j))^2 + A \int |\nabla \xi|^p + B \int W(\xi).$$

Le terme en gradient est là pour régulariser et selectionner une solution (et garantir des résultats d'existence si $p > d$) ; W peut être un double puits si jamais on sait qu'il n'y a que deux types de matériau dans Ω.
Problème : ce problème est non-convexe.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Fast Marching Derivatives with Respect to Metrics and Applications, preprint

Travel-time tomography

Dans une "boite" $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ il y a un matériau inconnu et des ondes (lumière, son...) se propagent dans Ω assujetties à une métrique ξ qui dépend du matériau. On mésure des temps de parcours $t_{i,j}$ entre des sources x_i et des capteurs y_j dans $\Omega \cup \partial\Omega$. On cherche à retrouver ξ.
Une possibilité : résoudre

$$\min \sum_{i,j} (t_{i,j} - d_\xi(x_i, y_j))^2 + A \int |\nabla \xi|^p + B \int W(\xi).$$

Le terme en gradient est là pour régulariser et selectionner une solution (et garantir des résultats d'existence si $p > d$) ; W peut être un double puits si jamais on sait qu'il n'y a que deux types de matériau dans Ω.
Problème : ce problème est non-convexe.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Fast Marching Derivatives with Respect to Metrics and Applications, preprint

Travel-time tomography

Dans une "boite" $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ il y a un matériau inconnu et des ondes (lumière, son...) se propagent dans Ω assujetties à une métrique ξ qui dépend du matériau. On mésure des temps de parcours $t_{i,j}$ entre des sources x_i et des capteurs y_j dans $\Omega \cup \partial\Omega$. On cherche à retrouver ξ. Une possibilité : résoudre

$$\min \sum_{i,j} (t_{i,j} - d_\xi(x_i, y_j))^2 + A \int |\nabla \xi|^p + B \int W(\xi).$$

Le terme en gradient est là pour régulariser et selectionner une solution (et garantir des résultats d'existence si $p > d$) ; W peut être un double puits si jamais on sait qu'il n'y a que deux types de matériau dans Ω.
Problème : ce problème est non-convexe.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Fast Marching Derivatives with Respect to Metrics and Applications, preprint

Travel-time tomography

Dans une “boite” $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ il y a un matériau inconnu et des ondes (lumière, son...) se propagent dans Ω assujetties à une métrique ξ qui dépend du matériau. On mésure des temps de parcours $t_{i,j}$ entre des sources x_i et des capteurs y_j dans $\Omega \cup \partial\Omega$. On cherche à retrouver ξ. Une possibilité : résoudre

$$\min \sum_{i,j} (t_{i,j} - d_\xi(x_i, y_j))^2 + A \int |\nabla \xi|^p + B \int W(\xi).$$

Le terme en gradient est là pour régulariser et selectionner une solution (et garantir des résultats d'existence si $p > d$) ; W peut être un double puits si jamais on sait qu'il n'y a que deux types de matériau dans Ω.

Problème : ce problème est non-convexe.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Fast Marching Derivatives with Respect to Metrics and Applications, preprint

Travel-time tomography

Dans une "boite" $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ il y a un matériau inconnu et des ondes (lumière, son...) se propagent dans Ω assujetties à une métrique ξ qui dépend du matériau. On mésure des temps de parcours $t_{i,j}$ entre des sources x_i et des capteurs y_j dans $\Omega \cup \partial\Omega$. On cherche à retrouver ξ. Une possibilité : résoudre

$$\min \sum_{i,j} (t_{i,j} - d_\xi(x_i, y_j))^2 + A \int |\nabla \xi|^p + B \int W(\xi).$$

Le terme en gradient est là pour régulariser et selectionner une solution (et garantir des résultats d'existence si $p > d$) ; W peut être un double puits si jamais on sait qu'il n'y a que deux types de matériau dans Ω.

Problème : ce problème est non-convexe.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Fast Marching Derivatives with Respect to Metrics and Applications, preprint

Travel-time tomography

Dans une "boite" $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ il y a un matériau inconnu et des ondes (lumière, son...) se propagent dans Ω assujetties à une métrique ξ qui dépend du matériau. On mésure des temps de parcours $t_{i,j}$ entre des sources x_i et des capteurs y_j dans $\Omega \cup \partial\Omega$. On cherche à retrouver ξ. Une possibilité : résoudre

$$\min \sum_{i,j} (t_{i,j} - d_\xi(x_i, y_j))^2 + A \int |\nabla \xi|^p + B \int W(\xi).$$

Le terme en gradient est là pour régulariser et selectionner une solution (et garantir des résultats d'existence si $p > d$) ; W peut être un double puits si jamais on sait qu'il n'y a que deux types de matériau dans Ω.
Problème : ce problème est non-convexe.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Fast Marching Derivatives with Respect to Metrics and Applications, preprint

Travel-time tomography

Dans une "boite" $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ il y a un matériau inconnu et des ondes (lumière, son...) se propagent dans Ω assujetties à une métrique ξ qui dépend du matériau. On mésure des temps de parcours $t_{i,j}$ entre des sources x_i et des capteurs y_j dans $\Omega \cup \partial\Omega$. On cherche à retrouver ξ. Une possibilité : résoudre

$$\min \sum_{i,j} (t_{i,j} - d_\xi(x_i, y_j))^2 + A \int |\nabla \xi|^p + B \int W(\xi).$$

Le terme en gradient est là pour régulariser et selectionner une solution (et garantir des résultats d'existence si $p > d$) ; W peut être un double puits si jamais on sait qu'il n'y a que deux types de matériau dans Ω.
Problème : ce problème est non-convexe.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Fast Marching Derivatives with Respect to Metrics and Applications, preprint

Travel-time tomography

Dans une “boite” $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ il y a un matériau inconnu et des ondes (lumière, son...) se propagent dans Ω assujetties à une métrique ξ qui dépend du matériau. On mésure des temps de parcours $t_{i,j}$ entre des sources x_i et des capteurs y_j dans $\Omega \cup \partial\Omega$. On cherche à retrouver ξ. Une possibilité : résoudre

$$\min \sum_{i,j} (t_{i,j} - d_\xi(x_i, y_j))^2 + A \int |\nabla \xi|^p + B \int W(\xi).$$

Le terme en gradient est là pour régulariser et selectionner une solution (et garantir des résultats d'existence si $p > d$) ; W peut être un double puits si jamais on sait qu'il n'y a que deux types de matériau dans Ω.
Problème : ce problème est non-convexe.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Fast Marching Derivatives with Respect to Metrics and Applications, preprint

Travel-time tomography

Dans une "boite" $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ il y a un matériau inconnu et des ondes (lumière, son...) se propagent dans Ω assujetties à une métrique ξ qui dépend du matériau. On mésure des temps de parcours $t_{i,j}$ entre des sources x_i et des capteurs y_j dans $\Omega \cup \partial\Omega$. On cherche à retrouver ξ. Une possibilité : résoudre

$$\min \sum_{i,j} (t_{i,j} - d_\xi(x_i, y_j))^2 + A \int |\nabla \xi|^p + B \int W(\xi).$$

Le terme en gradient est là pour régulariser et selectionner une solution (et garantir des résultats d'existence si $p > d$) ; W peut être un double puits si jamais on sait qu'il n'y a que deux types de matériau dans Ω.

Problème : ce problème est non-convexe.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Fast Marching Derivatives with Respect to Metrics and Applications, preprint

Travel-time tomography

Dans une “boite” $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ il y a un matériau inconnu et des ondes (lumière, son...) se propagent dans Ω assujetties à une métrique ξ qui dépend du matériau. On mésure des temps de parcours $t_{i,j}$ entre des sources x_i et des capteurs y_j dans $\Omega \cup \partial\Omega$. On cherche à retrouver ξ. Une possibilité : résoudre

$$\min \sum_{i,j} (t_{i,j} - d_\xi(x_i, y_j))^2 + A \int |\nabla \xi|^p + B \int W(\xi).$$

Le terme en gradient est là pour régulariser et selectionner une solution (et garantir des résultats d'existence si $p > d$) ; W peut être un double puits si jamais on sait qu'il n'y a que deux types de matériau dans Ω.
Problème : ce problème est non-convexe.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Fast Marching Derivatives with Respect to Metrics and Applications, preprint

Travel-time tomography

Dans une "boite" $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ il y a un matériau inconnu et des ondes (lumière, son...) se propagent dans Ω assujetties à une métrique ξ qui dépend du matériau. On mésure des temps de parcours $t_{i,j}$ entre des sources x_i et des capteurs y_j dans $\Omega \cup \partial\Omega$. On cherche à retrouver ξ. Une possibilité : résoudre

$$\min \sum_{i,j} (t_{i,j} - d_\xi(x_i, y_j))^2 + A \int |\nabla \xi|^p + B \int W(\xi).$$

Le terme en gradient est là pour régulariser et selectionner une solution (et garantir des résultats d'existence si $p > d$) ; W peut être un double puits si jamais on sait qu'il n'y a que deux types de matériau dans Ω.
Problème : ce problème est non-convexe.

F. Benmansour, G. Carlier, G. Peyré and F. Santambrogio, Fast Marching Derivatives with Respect to Metrics and Applications, preprint

Le calcul des distances sur une grille

Calcul numérique par Fast Marching Method : si h est le pas de discrétisation et $\mathcal{U}_{i,j}$ les valeurd e $\mathcal{U}$ au point (i,j), on veut résoudre le système

$$(D_x\mathcal{U})^2_{i,j} + (D_y\mathcal{U})^2_{i,j} = (\xi_{i,j})^2,$$

$$(D_x\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i-1,j}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i+1,j}), 0\}/h,$$
$$(D_y\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j-1}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j+1}), 0\}/h.$$

Ce système a une seule solution, qu'on peut **calculer de manière iterative** en partant de $y = x_0$ et en s'éloignant au fur et à mesure (selon l'ordre croissant des valeurs de $\mathcal{U}$), donne une vrai approximation de $\mathcal{U}_\xi$. Si les points de la grille sont N le coût computationnel est $N \ln N$.

Le calcul des distances sur une grille

Calcul numérique par Fast Marching Method : si h est le pas de discrétisation et $\mathcal{U}_{i,j}$ les valeurd e $\mathcal{U}$ au point (i,j), on veut résoudre le système

$$(D_x\mathcal{U})^2_{i,j} + (D_y\mathcal{U})^2_{i,j} = (\xi_{i,j})^2,$$

$$(D_x\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i-1,j}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i+1,j}), 0\}/h,$$
$$(D_y\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j-1}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j+1}), 0\}/h.$$

Ce système a une seule solution, qu'on peut **calculer de manière iterative** en partant de $y = x_0$ et en s'éloignant au fur et à mesure (selon l'ordre croissant des valeurs de $\mathcal{U}$), donne une vrai approximation de $\mathcal{U}_\xi$. Si les points de la grille sont N le coût computationnel est $N \ln N$.

Le calcul des distances sur une grille

Calcul numérique par Fast Marching Method : si h est le pas de discrétisation et $\mathcal{U}_{i,j}$ les valeurd e $\mathcal{U}$ au point (i,j), on veut résoudre le système

$$(D_x\mathcal{U})^2_{i,j} + (D_y\mathcal{U})^2_{i,j} = (\xi_{i,j})^2,$$

$$(D_x\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i-1,j}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i+1,j}), 0\}/h,$$
$$(D_y\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j-1}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j+1}), 0\}/h.$$

Ce système a une seule solution, qu'on peut **calculer de manière iterative** en partant de $y = x_0$ et en s'éloignant au fur et à mesure (selon l'ordre croissant des valeurs de $\mathcal{U}$), donne une vrai approximation de $\mathcal{U}_\xi$. Si les points de la grille sont N le coût computationnel est $N \ln N$.

Le calcul des distances sur une grille

Calcul numérique par Fast Marching Method : si h est le pas de discrétisation et $\mathcal{U}_{i,j}$ les valeurd e $\mathcal{U}$ au point (i,j), on veut résoudre le système

$$(D_x\mathcal{U})^2_{i,j} + (D_y\mathcal{U})^2_{i,j} = (\xi_{i,j})^2,$$

$$(D_x\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i-1,j}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i+1,j}), 0\}/h,$$
$$(D_y\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j-1}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j+1}), 0\}/h.$$

Ce système a une seule solution, qu'on peut **calculer de manière iterative** en partant de $y = x_0$ et en s'éloignant au fur et à mesure (selon l'ordre croissant des valeurs de $\mathcal{U}$), donne une vrai approximation de $\mathcal{U}_\xi$. Si les points de la grille sont N le coût computationnel est $N \ln N$.

Le calcul des distances sur une grille

Calcul numérique par Fast Marching Method : si h est le pas de discrétisation et $\mathcal{U}_{i,j}$ les valeurd e $\mathcal{U}$ au point (i,j), on veut résoudre le système

$$(D_x\mathcal{U})^2_{i,j} + (D_y\mathcal{U})^2_{i,j} = (\xi_{i,j})^2,$$

$$(D_x\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i-1,j}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i+1,j}), 0\}/h,$$
$$(D_y\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j-1}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j+1}), 0\}/h.$$

Ce système a une seule solution, qu'on peut **calculer de manière iterative** en partant de $y = x_0$ et en s'éloignant au fur et à mesure (selon l'ordre croissant des valeurs de $\mathcal{U}$), donne une vrai approximation de $\mathcal{U}_\xi$. Si les points de la grille sont N le coût computationnel est $N \ln N$.

Le calcul des distances sur une grille

Calcul numérique par Fast Marching Method : si h est le pas de discrétisation et $\mathcal{U}_{i,j}$ les valeurd e $\mathcal{U}$ au point (i,j), on veut résoudre le système

$$(D_x\mathcal{U})^2_{i,j} + (D_y\mathcal{U})^2_{i,j} = (\xi_{i,j})^2,$$

$$(D_x\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i-1,j}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i+1,j}), 0\}/h,$$
$$(D_y\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j-1}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j+1}), 0\}/h.$$

Ce système a une seule solution, qu'on peut **calculer de manière iterative** en partant de $y = x_0$ et en s'éloignant au fur et à mesure (selon l'ordre croissant des valeurs de $\mathcal{U}$), donne une vrai approximation de $\mathcal{U}_\xi$.
Si les points de la grille sont N le coût computationnel est $N \ln N$.

Le calcul des distances sur une grille

Calcul numérique par Fast Marching Method : si h est le pas de discrétisation et $\mathcal{U}_{i,j}$ les valeurd e $\mathcal{U}$ au point (i,j), on veut résoudre le système

$$(D_x\mathcal{U})^2_{i,j} + (D_y\mathcal{U})^2_{i,j} = (\xi_{i,j})^2,$$

$$(D_x\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i-1,j}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i+1,j}), 0\}/h,$$
$$(D_y\mathcal{U})_{i,j} := \max\{(\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j-1}), (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j+1}), 0\}/h.$$

Ce système a une seule solution, qu'on peut **calculer de manière iterative** en partant de $y = x_0$ et en s'éloignant au fur et à mesure (selon l'ordre croissant des valeurs de $\mathcal{U}$), donne une vrai approximation de $\mathcal{U}_\xi$. Si les points de la grille sont N le coût computationnel est $N \ln N$.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut remplacer l'intégrale sur une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ qu'on avait en continu avec son corréspondant discret, pour calculer les dérivées (par rapport à ξ). Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = h^2\xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)-\mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

$$\nabla_\xi\mathcal{U}(y) = \text{ qqchose avec } \left\{\nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\, \nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\, e_y\right\}.$$

Le coût devient de l'ordre de $N^2 \ln N$.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut remplacer l'intégrale sur une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ qu'on avait en continu avec son corréspondant discret, pour calculer les dérivées (par rapport à ξ). Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = h^2\xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)-\mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

$$\nabla_\xi\mathcal{U}(y) = \text{ qqchose avec } \left\{\nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\ \nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\ e_y\right\}.$$

Le coût devient de l'ordre de $N^2 \ln N$.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut remplacer l'intégrale sur une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ qu'on avait en continu avec son corréspondant discret, pour calculer les dérivées (par rapport à ξ). Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = h^2\xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(y_1) - \mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

$$\nabla_\xi\mathcal{U}(y) = \text{ qqchose avec } \left\{\nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\ \nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\ e_y\right\}.$$

Le coût devient de l'ordre de $N^2 \ln N$.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut remplacer l'intégrale sur une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ qu'on avait en continu avec son corréspondant discret, pour calculer les dérivées (par rapport à ξ). Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = h^2\xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)-\mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

$$\nabla_\xi\mathcal{U}(y) = \text{ qqchose avec } \left\{\nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\ \nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\ e_y\right\}.$$

Le coût devient de l'ordre de $N^2 \ln N$.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut remplacer l'intégrale sur une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ qu'on avait en continu avec son corréspondant discret, pour calculer les dérivées (par rapport à ξ). Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = h^2\xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)-\mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

$$\nabla_\xi\mathcal{U}(y) = \text{ qqchose avec } \left\{\nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\ \nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\ e_y\right\}.$$

Le coût devient de l'ordre de $N^2 \ln N$.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut remplacer l'intégrale sur une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ qu'on avait en continu avec son corréspondant discret, pour calculer les dérivées (par rapport à ξ). Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = h^2\xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)-\mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

$$\nabla_\xi\mathcal{U}(y) = \text{ qqchose avec } \left\{\nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\ \nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\ e_y\right\}.$$

Le coût devient de l'ordre de $N^2 \ln N$.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut remplacer l'intégrale sur une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ qu'on avait en continu avec son corréspondant discret, pour calculer les dérivées (par rapport à ξ). Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = h^2\xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(y_1) - \mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

$$\nabla_\xi\mathcal{U}(y) = \text{ qqchose avec } \left\{\nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\ \nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\ e_y\right\}.$$

Le coût devient de l'ordre de $N^2 \ln N$.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut remplacer l'intégrale sur une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ qu'on avait en continu avec son corréspondant discret, pour calculer les dérivées (par rapport à ξ). Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = h^2\xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1)-\mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

$$\nabla_\xi\mathcal{U}(y) = \text{ qqchose avec } \left\{\nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\ \nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\ e_y\right\}.$$

Le coût devient de l'ordre de $N^2 \ln N$.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut remplacer l'intégrale sur une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ qu'on avait en continu avec son corréspondant discret, pour calculer les dérivées (par rapport à ξ). Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = h^2\xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(y_1) - \mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

$$\nabla_\xi\mathcal{U}(y) = \text{ qqchose avec } \left\{\nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\ \nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\ e_y\right\}.$$

Le coût devient de l'ordre de $N^2 \ln N$.

Calcul du sous-gradient par FMM

On veut remplacer l'intégrale sur une géodésique $\sigma_{x_0,y}$ qu'on avait en continu avec son corréspondant discret, pour calculer les dérivées (par rapport à ξ). Ici en tout point y on peut écrire

soit $(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1))^2+(\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_2))^2 = h^2\xi^2(y)$ soit $\mathcal{U}(y)-\mathcal{U}(y_1) = h\xi(y)$,

Pour un ou deux parents y_1, y_2. Si ξ varie on a soit

$$\delta\mathcal{U}(y) = \frac{2h^2\xi(y)\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)(\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(y_1)) + \delta\mathcal{U}(y_2)(\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(y_2))}{2\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(y_1) - \mathcal{U}(y_2)}$$

soit $\delta\mathcal{U}(y) = h\delta\xi(y) + \delta\mathcal{U}(y_1)$. On peut donc calculer $\nabla_\xi\mathcal{U}(y)$ de manière recursive, dans le même cycle du FMM.

$$\nabla_\xi\mathcal{U}(y) = \text{ qqchose avec } \left\{\nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\, \nabla_\xi\mathcal{U}(y_1),\, e_y\right\}.$$

Le coût devient de l'ordre de $N^2 \ln N$.

Et maintenant . . .

. . .des images ainsi que des vidéos