Structure des ensembles d'équilibres de Nash de jeux à paiements entiers Conséquences sur la complexité de certains problèmes de décision en théorie des jeux.

G.Vigeral

CEREMADE Université Paris-Dauphine

11 Février 2021,
Séminaire Français d'Optimisation

Table of contents

Jeux finis

Jeu fini Γ:

- N joueurs $N \geq 2$.
- Pour chaque joueur i, un ensemble fini d'actions A^i de cardinal k^i.
- Pour chaque joueur i, une fonction de paiement $g^i : \Pi A^i \to \mathbb{R}$.
- On supposera souvent que le jeu est à paiement entier : $g^i : \Pi A^i \to \mathbb{Z}$.
- Les joueurs choisissent simultanément une “action mixte” ie une probabilité x^i dans $\Delta(A^i) = \Delta_{k^i}$ et maximisent leur espérance de gain.
- Concept fondamental de solution : équilibre de Nash. $(x^1, \cdots, x^n)$ équilibre de Nash si pour tout i

$$x^i \in Argmax g^i(x^1, \cdots, x^{i-1}, \cdot, x^{i+1}, \cdots, x^n).$$

- $EN(\Gamma)$ ensemble des équilibres de Γ ; $PEN(\Gamma)$ ensemble des vecteurs de paiements d'équilibres.

Ensembles d'équilibres et de paiements d'équilibre

$$\begin{aligned} EN(\Gamma) &= \{x \in \Pi_i \Delta_{k^i} | \forall i \in N, \forall 1 \leq l \leq k^i, x_l = 0 \text{ ou } g^i(a^i_l, x^{-i}) = g^i(x)\} \\ PEN(\Gamma) &= g(EN(\Gamma)) \subset \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

Ces ensembles sont toujours

- Compacts (évident)
- Non vides (théorème de Nash)
- Semi algébriques (trivial pour EN, conséquence de Tarski-Seidenberg pour PEN)

Rappel : un ensemble de dimension finie est semi algébrique s'il peut s'écrire comme union et intersection finie d'ensembles de la forme $\{P_j(x) \leq 0\}$ ou $\{P_j(x) < 0\}$ où les P_j sont des polynômes à plusieurs variables.
On dira qu'il est $\mathbb{Z}$-semi algébrique si les polynômes sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Problème inverse

Inversement, étant donné un ensemble E, à quelles conditions peut on l'écrire comme un ensemble d'équilibres (ou de paiements d'équilibre de Nash) d'un jeu fini ?
On va montrer, par exemple :

Proposition (V. 2021)

Si $N \geq 3$, $E \subset \mathbb{R}^N$ est l'ensemble des paiements d'équilibre d'un jeu Γ à N joueurs (resp. et à paiement entier) si et seulement si il est non vide, compact et semi algébrique (resp. $\mathbb{Z}$-semialgébrique). (V. 2021)

Réciproque totale dès que $N \geq 3$, pour le cas des paiements d'équilibres.

Motivations

- Intérêt théorique : “équivalence” entre les paiements d’équilibre d’un jeu fini et un système de contraintes polynomiales. Etre l’ensembles des paiements d’équilibres d’un jeu est un certificat “canonique” de non vacuité pour les ensembles semi algébriques compacts.
- Analogie avec le lien entre fonctions convexes et ensembles convexes. De même que minimiser une fonction convexe sur un convexe revient à minimiser une somme de 2 convexes sans contraintes, minimiser une fonction sur un semi algébrique peut se réécrire comme un problème de jeu.
- Conséquences en terme de complexité de certains problèmes de décision (questions dont la réponse est “Oui” ou “Non”) en théorie des jeux.

Table of contents

Structure des équilibres

- Tout jeu à paiement entier admet au moins un équilibre où les joueurs jouent chaque action avec une probabilité rationnelle.
- Tout jeu à paiement entier admet au moins un paiement d'équilibre dans $\mathbb{Q}^2$.
- Réciproquement, pour tout $e \in \mathbb{Q}^2$ il existe un jeu à deux joueurs à paiement entier avec un unique équilibre de paiement e.
- Un ensemble $E \in \mathbb{R}^2$ est l'ensemble des paiements d'équilibre de Nash d'un jeu (resp. d'un jeu à paiement entier) si et seulement si c'est une union finie non vide d'ensembles (non nécessairement disjoints) de la forme $[a,b] \times [c,d]$ (resp. avec a,b,c,d dans $\mathbb{Q}$) (Lehrer Solan Viossat 2011).

Complexité dans le cas de deux joueurs

Typiquement, les problèmes de décision non triviaux concernant des jeux à 2 joueurs et à paiement entier sont $\mathbf{NP}$-complets (voir transparent suivant).
C'est le cas par exemple pour (Gilboa Zemel 1989) :

- Ce jeu possède t-il au moins deux équilibres de Nash ?
- Ce jeu possède t-il au moins un équilibre de Nash donnant un paiement positif à chaque joueur ?
- Ce jeu possède t-il au moins un équilibre de Nash dans lequel chaque joueur joue sa première action avec probabilité 0 ?
- Ce jeu possède t-il au moins un équilibre dans lequel chaque joueur joue sa première action avec probabilité strictement positive ?

Rappels sur **NP**

Un problème de décision est dans **NP** si on peut le résoudre en temps polynomial (en les données) avec une machine de Turing **non déterministe.**

Définition équivalente : il existe un entier naturel k, un ensemble de certificats Y, et une machine de Turing $M(x,y)$ déterministe, qui à une instance du problème donnée x et un certificat donné $y \in Y$ répond “oui” ou “non” en temps polynomial, telle que

- Si la réponse au problème de départ est non pour l'instance x alors $M(x,y)$ renvoie “non” pour tout certificat y.
- Si la réponse au problème de départ est oui pour l'instance x de taille n alors $M(x,y)$ renvoie “oui” pour au moins un certificat y de taille plus petite que n^k.

On a $\mathbf{P} \subset \mathbf{NP} \subset \mathbf{EXPTIME}$ avec au moins une (et sans doute deux) inclusions strictes.

Problèmes **NP**-difficiles et **NP**-complet

On dit qu'un problème de décision A se réduit (en temps polynomial) à un problème de décision B s'il existe une fonction calculable en temps polynomial f tel que $A(x)$ est vrai si et seulement si $B(f(x))$ est vrai. Autrement dit, résoudre A est au moins aussi simple que résoudre B.

Un problème de décision B est **NP**-difficile si tous les problèmes dans **NP** se réduisent à B, et un problème est **NP**-complet s'il est à la fois dans **NP** et **NP**-difficile.

Exemples de problèmes **NP**-complets : problème du voyageur de commerce, 3-SAT, existence d'un sous ensemble de somme nulle, recherche de cliques dans un graphe,$\cdots$

Table of contents

Revue de littérature

Contrairement au cas de deux joueurs, un jeu à paiement entier n'admet pas forcément un équilibre à paiement rationnel pour chaque joueur (Nash 1951) .
Mais tout jeu à 3 joueurs ou plus et paiement entier admet au moins un équilibre de Nash donnant un paiement algébrique à chacun des joueurs (conséquence de Tarski-Seidenberg).
Résultat inverse partiel :

- Bubelis '79 : pour tout nombre algébrique e il existe un jeu à 3 joueur et paiements entiers qui possède un unique équilibre de Nash, dans lequel le paiement du joueur 1 est e.

Revue de littérature

L'ensemble des équilibres (resp. paiements d'équilibres) de tout jeu à 3 joueurs ou plus est non vide, semi algébrique et compact.

Résultats inverses partiels :

- Datta '03 : Toute ensemble algébrique est isomorphe à l'ensemble des équilibres complètement mixtes d'un jeu à 3 joueurs.
- Balkenborg-Vermeulen '14 : tout ensemble semi algébrique compact et connexe est homéomorphe à une composante connexe de l'ensembles des équilibres d'un jeu fini.
- Levy '16, Viossat-V '16 : tout ensemble semi algébrique compact non vide de $\mathbb{R}^N$ est la projection de l'ensemble de paiements d'équilibre d'un jeu avec strictement plus de N joueurs.

Remarque : à chaque fois il y a universalité seulement modulo une projection ou à isomorphisme près.

Structures des équilibres

Nouveaux résultats inverses :

- Si e est un vecteur dans $\mathbb{A}^N$ (où $\mathbb{A}$ est l'ensemble des réels algébriques) alors il existe un jeu à paiement entier et à N joueur avec un unique équilibre de paiement e (V. 2021, généralise Bubelis 1979).
- $E \subset \mathbb{R}^N$ est l'ensemble des paiements d'équilibre d'un jeu Γ à N joueurs (resp. et à paiement entier) si et seulement si il est non vide, compact et semi algébrique (resp. $\mathbb{Z}$-semialgébrique). (V. 2021)
- Si $E \subset [0,1[^N$ est non vide, compact et semi algébrique (resp. $\mathbb{Z}$-semialgébrique) alors il existe un jeu Γ tel que $e \in E$ ssi il existe un équilibre de Nash de Γ dans lequel chaque joueur i joue sa première action avec probabilité e_i. (V. 2021)

Constructif !

Remarque : preuves constructives, taille des jeux polynomiale en la taille du problème. Plus spécifiquement, étant donné

- $E \subset \mathbb{R}^N$ une union et intersection de K ensembles de la forme $\{P_k(x) \leq 0\}$ avec P_k des polynômes de degré $\leq d$ en chaque variable et avec des coefficients entiers $\leq M$.
- Une borne C entière.
- Pour chaque joueur un nombre algébrique e^i unique solution d'une équation de degré $\leq d$ dans un intervalle donné de longueur $\geq 1/M$.

on construit un jeu Γ, tel que $PEN(\Gamma) = \{e\} \cup \left(E \cap [-C, C]^N\right)$, dont le nombre d'actions par joueur et le nombre de bit des paiements (entiers) sont polynomiaux en $K, d, N, \ln(M), \ln(C)$.

Résultats de complexité

Une conséquence de ces résultats de structures est que dans le cas de jeux à 3 joueurs (ou plus) et à paiement entier les problèmes de décision sont typiquement $\exists\mathbb{R}$-complets. Par exemple :

- Ce jeu possède t-il au moins deux équilibres (Bilo Mavronicolas 2016) ?
- Ce jeu possède t-il au moins un équilibre donnant un paiement plus grand qu'un rationnel donné à chaque joueur (Bilo Mavronicolas 2016) ?
- Ce jeu possède t-il au moins un équilibre donnant un paiement plus grand qu'un algébrique donné à chaque joueur (V. 2021) ?
- Un ensemble F $\mathbb{Z}$-semi algébrique étant fixé (F ni vide ni $\mathbb{R}^N$ tout entier) ; "Ce jeu possède t-il au moins un équilibre ayant un paiement dans F" ? (V. 2021) ?
- Ce jeu possède t-il au moins un équilibre dans lequel chaque joueur joue ses k premières actions avec probabilité fixée (algébrique) (V. 2021) ?

La classe de complexité $\exists\mathbb{R}$

$\exists\mathbb{R}$ est la classe de complexité du problème de décision consistant à déterminer si un ensemble $\mathbb{Z}$-semialgébrique est non vide.

- Un problème de décision est dans $\exists\mathbb{R}$ s'il peut se réduire (polynomialement) à déterminer si un ensemble $\mathbb{Z}$-semialgébrique est non vide.
- Un problème de décision A est $\exists\mathbb{R}$-difficile si déterminer si un ensemble $\mathbb{Z}$-semialgébrique est non vide peut se réduire (polynomialement) à A.
- Un problème de décision A est $\exists\mathbb{R}$-complet s'il est à la fois dans $\exists\mathbb{R}$ et $\exists\mathbb{R}$-difficile.

D'après Canny (1988) on a $\mathbf{P} \subset \mathbf{NP} \subset \exists\mathbb{R} \subset \mathbf{EXPTIME}$ avec au moins une (et sans doute trois) inclusions strictes.
Exemples de problèmes $\exists\mathbb{R}$-complet : le problème de la galerie d'art (peut on garder un polygône par k gardes) ; réalisation d'un graphe avec des longueurs d'arêtes données.

Les résultats de structure entrainent les résultats de complexité

Montrons par exemple que décider si un jeu à paiement entier possède un équilibre dans lequel le premier joueur a un paiement de $\sqrt{2}$ est $\exists\mathbb{R}$-complet.
a) Dans $\exists\mathbb{R}$. Supposons que l'on sache déterminer si un ensemble semi algébrique est non vide. Pour un jeu donné à N joueurs, on considère l'ensemble $\mathbb{Z}$-semialgébrique $E \subset \mathbb{R}^N$ de ses équilibres. Les fonctions de paiements étant multiaffines (donc des polynômes), on en déduit l'ensemble $\mathbb{Z}$-semialgébrique $E' = \{(e,f)\}$ où e est un équilibre et f le paiement d'équilibre correspondant. La réponse est "oui" ssi l'ensemble

$$E' \cap \left(\mathbb{R}^? \times \left(\{\sqrt{2}\} \times \mathbb{R}^{N-1}\right)\right))$$

est non vide.

Les résultats de structure entrainent les résultats de complexité

b) $\exists\mathbb{R}$-difficile. Supposons que l'on sache déterminer si un jeu à paiement entier possède un équilibre dans lequel le premier joueur a un paiement de $\sqrt{2}$.
Soit E un ensemble semi algébrique dans $\mathbb{R}^N$. On peut montrer qu'on ne change pas la nonvacuité de E en l'intersectant avec une boule d'un certain rayon R, et en remplaçant les "> 0" par $\geq \varepsilon$, avec R et ε de taille raisonnable par rapport à celle de E. Autrement dit on peut sans perte de généralité supposer E compact.
Soit $E' = (\{\sqrt{2}\} \times E) \cup \{0\}^{N+1}$. E' est compact, semialgébrique et non vide donc je peux construire un jeu Γ de taille polynomiale en la taille de E' (donc de E) tel que l'ensemble des paiements d'équilibre de Γ est E'. Et E est non vide si et seulement si Γ possède un équilibre dans lequel le premier joueur a un paiement de $\sqrt{2}$.

Table of contents

On veut montrer

Proposition (V. 2021)

Si $E \subset [0,1[^N$ est non vide, compact et $\mathbb{Z}$-semialgébrique, alors il existe un jeu Γ à paiement entier tel que $e \in E$ ssi il existe un équilibre de Nash de Γ dans lequel chaque joueur i joue sa première action avec probabilité e_i.

Comment faire une multiplication

On note p_j^i la probabilité que le joueur i joue sa j ième action. Supposons que parmi toutes les actions du joueur 1,

- L'une d'entre elles donne un paiement de 1 si J_2 joue sa k-ième action, et 0 sinon.
- Une autre donne un paiement de 1 si J_2 joue sa i-ième action et J_3 joue sa j-ième action, et 0 sinon.

Admettons également que l'on sache que dans tout équilibre, ces deux actions du joueur 1 soient jouées avec probabilité strictement positives. Alors elles doivent donner le même paiement, et donc à l'équilibre,

$$p_k^2 = p_i^2 \times p_j^3$$

Comment faire un monome

Supposons que parmi toutes les actions du joueur 1,

- L'une d'entre elles donne un paiement de 1 si J_2 joue sa i-ième action, et 0 sinon.
- Une autre donne un paiement de 1 si J_3 joue sa j-ième action, et 0 sinon.

Admettons également que l'on sache que dans tout équilibre, ces deux actions du joueur 1 soient jouées avec probabilité strictement positives. Alors elles doivent donner le même paiement, et donc à l'équilibre

$$p_i^2 = p_j^3$$

En combinant avec le slide précédent, on trouve qu'à l'équilibre

$$p_k^2 = (p_i^2)^2$$

Comment avoir des inégalités polynomiales

En itérant ce genre d'arguments, on peut s'arranger pour qu'à l'équibre $p_k^2 = (p_l^1)^3(p_i^2)^2(p_j^3)$ et $p_m^2 = (p_l^1)^4(p_i^2)(p_j^3)^2$. Supposons que parmi toutes les actions du joueur 1,

- L'une d'entre elles donne un paiement de 5 quelque soit ce que font les autres.
- Une autre donne un paiement de 1 si J_2 joue sa k-ième action, de 3 si J_2 joue sa m-ième action, et de 0 sinon.

Admettons également que l'on sache que dans tout équilibre, la deuxième de ces actions est jouée avec proba positive alors que la première est jouée avec proba 0. Alors la deuxième doit donner un paiement plus élevé, i.e.

$$(p_l^1)^3(p_i^2)^2(p_j^3) + 3(p_l^1)^4(p_i^2)(p_j^3)^2 - 5 \geq 0$$

Difficultés

- Faire des unions et intersections de tels ensemble obtenus par des inégalités polynomiales
- Réussir à ce que les actions qu'on veut être jouées avec proba positive dans tout équilibre le soit bien, que celles que l'on veut être jouées avec proba nulle le soient bien, etc...

Un mot à propos des notations

- Actions notées avec des capitales : A_2^1 peut être une action du joueur 1 par ex.
- Une minuscule représente la probabilité avec laquelle l'action majuscule correspondante est jouée. Par exemple pour un équilibre σ fixé on pourra écrire a_2^1 pour $\sigma^1(A_2^1)$.
- Les jeux ne seront pas donnés sous forme matricielle ; le paiement de chaque action est donné directement comme une fonction multiaffine des probabilités des actions des autres joueurs.

Exemple

Plutôt que d'écrire un jeu sous la forme normale

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A_1^2 & A_2^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1^1 \\ A_2^1 \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,0,0) \\ (0,0,0) & (0,0,0) \end{pmatrix} \\ & A_1^3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A_1^2 & A_2^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,1,1) \\ (0,0,1) & (2,1,1) \end{pmatrix} \\ A_2^3 \end{array}$$

on écrira

$$\begin{aligned} g^1(A_1^1, \sigma^{-1}) &= g^2(A_1^2, \sigma^{-2}) = g^1(A_1^3, \sigma^{-3}) = 0 \\ g^1(A_2^1, \sigma^{-1}) &= 2\sigma^2(A_2^2)\sigma^3(A_2^3) \\ g^2(A_2^2, \sigma^{-2}) &= \sigma^3(A_2^3) \\ g^2(A_2^3, \sigma^{-3}) &= 1 - \sigma^1(A_1^1)\sigma^2(A_1^2) \end{aligned}$$

Exemple

Plutôt que d'écrire un jeu sous la forme normale

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} A_1^2 & A_2^2 \end{array} \\
\begin{array}{c} A_1^1 \\ A_2^1 \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,0,0) \\ (0,0,0) & (0,0,0) \end{pmatrix} \\
 & A_1^3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} A_1^2 & A_2^2 \end{array} \\
\begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,1,1) \\ (0,0,1) & (2,1,1) \end{pmatrix} \\
A_2^3
\end{array}
$$

ou tout simplement

$$
\begin{aligned}
g^1(A_1^1) &= g^2(A_1^2) = g^1(A_1^3) = 0 \\
g^1(A_2^1) &= 2a_2^2 a_2^3 \\
g^2(A_2^2) &= a_2^3 \\
g^2(A_2^3) &= 1 - a_1^1 a_1^2
\end{aligned}
$$

Exemple d'ensemble

On va montrer
Si $E \subset [0,1[^N$ est non vide, compact et $\mathbb{Z}$-semialgébrique, alors il existe un jeu Γ à paiement entier tel que $e \in E$ ssi il existe un équilibre de Nash de Γ dans lequel chaque joueur i joue sa première action avec probabilité e_i.
sur un exemple.

- On prend $N = 3$ and $E = \{(e_1)^2 + (e_2)^2 + (e_3)^2 + e_1e_2 + e_1e_3 + 2e_2e_3 \leq \frac{1}{400}\} \cap \mathbb{R}^3_+$.
- Semi algebrique, dans $[0,1[^3$, fermé, et non vide : $(0,0,0) \in E$.

Ensemble d'actions

Chaque joueur i aura deux familles d'actions :

- 11 actions notées avec la lettre X : X^i_*, X^i_0, et $X^i_{j,k,l}$ pour j, k et l entiers naturels tels que $1 \leq j+k+l \leq 2$. Appellées "inconnues", donnent un paiement identiquement nul.
- Des actions notées avec la lettre Y. Appellées "contraintes". Leur paiement (qui ne dépendra que des probabilités x) sera contruit par la suite.

On dit qu'un équilibre est adapté si toutes les stratégies Y de chaque joueur sont jouées avec probabilité 0.
On va construire Γ tel que :

- Pour tout $e \in E$, il existe un unique équilibre adapté tel que $(x^1_*, x^2_*, x^3_*) = e$.
- Pour tout $e \notin E$, il n'existe aucun unique équilibre adapté tel que $(x^1_*, x^2_*, x^3_*) = e$.
- Il existe un unique équilibre inadapté, pour lequel $(x^1_*, x^2_*, x^3_*) = (0, 0, 0) \in E$.

Première partie de la construction : équilibres adaptés

On va ajouter des contraintes telles que $e \in E$ ssi il existe un équilibre adapté tel que $x_*^i = e^i$ pour tout i.
Idée : dans un équilibre adapté, le paiement est 0 et les stratégies Y ne sont pas jouées. Leur paiement, fonction des x^i est donc négatif ce qui entraîne des inégalités vérifiées par les x^i.

Les contraintes d'initialisation

Rôle : assurer que dans tout équilibre adapté on ait $x^i_{j,k,l} = (x^1_*)^j (x^2_*)^k (x^3_*)^l$ for $j+k+l=1$, c'est à dire $x^i_{1,0,0} = x^1_*$; $x^i_{0,1,0} = x^2_*$; $x^i_{0,0,1} = x^3_*$.

On ajoute 8 statégies "contraintes" pour le joueur 1 de paiement

- $\pm(x^2_{0,1,0} - x^2_*)$
- $\pm(x^3_{0,1,0} - x^2_*)$
- $\pm(x^2_{0,0,1} - x^3_*)$
- $\pm(x^3_{0,0,1} - x^3_*)$

On fait pareil pour les joueurs 2 et 3.

Contraintes d'induction

Rôle : assurer que dans tout équilibre adapté on ait $x^i_{j,k,l} = (x^1_*)^j (x^2_*)^k (x^3_*)^l$ for $j+k+l=2$.
Par exemple on ajoute des contraintes au joueur 2 de paiement

- $\pm(x^1_{2,0,0} - x^1_{1,0,0} x^3_{1,0,0})$, ce qui assure que $x^1_{2,0,0} = (x^1_*)^2$ dans tout équilibre adapté
- $\pm(x^1_{1,1,0} - x^1_{1,0,0} x^3_{0,1,0})$, ce qui assure que $x^1_{1,1,0} = x^1_* x^2_*$ dans tout équilibre adapté
- ...

Contraintes semi algébriques

Rôle : assurer que dans tout équilibre adapté on ait $(x_*^1, x_*^2, x_*^3) \in E$.
Pour chaque joueur i une stratégie de paiement $x_{2,0,0}^{i-1} + x_{0,2,0}^{i-1} + x_{0,0,2}^{i-1} + x_{1,1,0}^{i-1} + x_{1,0,1}^{i-1} + 2x_{0,1,1}^{i-1} - \frac{1}{400}$
A cause des contraintes précédentes, dans tout équilibre adapté le paiement de cette stratégie, qui doit être négatif, est : $(x_*^1)^2 + (x_*^2)^2 + (x_*^3)^2 + x_*^1 x_*^2 + x_*^1 x_*^3 + 2x_*^2 x_*^3 - \frac{1}{400})$

Equilibre adapté

Par construction, dans tout équilibre adapté $x_* \in E$.
Récirpoquement si $x_* \in E$,

- Fixons $x^i_{j,k,l} = (x^1_*)^j (x^2_*)^k (x^3_*)^l$ pour $j+k+l \geq 2$
- Fixons $x^i_0 = 1 - x^i_* - \sum x^i_{j,k,l}$.
- Puisque $x^i_0 \geq 0$ la stratégie est bien définie
- Toutes les contraintes sont satisfaites

Et on a bien $x_* \in E$.

Deuxième partie : autres équilibres

Il peut très bien y avoir plein d'équilibres pas adaptés... On n'a même pas vérifié que E était non vide !
Ajoutons une dernière contrainte Y_*^i de paiement $K(1 - x_0^{i-1} - x_*^{i-1} - \sum x_{j,k,l}^{i-1})$ avec K grand entier.

- Son paiement est 0 dans tout équilibre adapté, donc ça ne change rien à la construction précédente.
- Dans tout équilibre non adapté, $y_*^i = 1$ pour tout i.
- Donc il existe un unique équilibre non adapté pour lequel $x_* = (0,0,0) \in E$!

Cas général

En général c'est plus compliqué car

- $N \geq 3$
- Polynômes quelconques : pas de difficulté supplémentaire
- Intersections : pas de difficulté supplémentaire
- Unions : plus difficile
- Seconde partie en général (quand $0 \notin E$) : nettement plus difficile. En particulier il n'y a pas de raison que E contienne un point à coordonnées rationnelles...

Perspectives

- Résultats du même ordre concernant les jeux paramétrés ? Etant donné une correspondance semi algébrique de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^N$, peut un construire un jeu $\Gamma(k)$ à N joueurs dont les paiements dépendent du paramètre $k \in \mathbb{R}^m$ et dont les paiements d'équilibre de Nash sont $f(k)$?
- Application à des jeux dynamiques (jeux stochastiques finis par ex) dont l'opérateur de programmation dynamique est donné par un jeu fini dont certains paiements sont paramétrés par l'estimation que les joueurs ont du futur.

Merci pour votre écoute

Merci !

Références I

J. Nash,
Non-cooperative Games.
Annals of Mathematics **54** (1951) 289–295.

V. Bubelis,
On equilibria in finite games.
International Journal of Game Theory **8** (1979) 65–79.

R.S. Datta,
Universality of Nash equilibria.
Mathematics of Operations Research, **28**(2003) 424–432.

E. Lehrer, E. Solan, and Y. Viossat,
Equilibrium payoffs of finite games.
Journal of Mathematical Economics, **47** (2011) 48–53.

D. Balkenborg and D. Vermeulen,
Universality of Nash components.
Games and Economic Behavior, **86** (2014) 67–76.

Références II

Y. J. Levy,
Projections and functions of Nash equilibria.
Int. J. Game Theory **45** (2016) 435–459.

G. Vigeral and Y. Viossat,
Semi-algebraic sets and equilibria of binary games.
Operations Research Letters, **44** (2016) 19–24.

G. Vigeral,
A characterization of sets of equilibrium payoffs of finite games with at least 3 players.
Preprint, (2021).