Obtention de bornes pour la convergence de méthodes de point fixe via le transport optimal

Thierry Champion

Laboratoire IMATH, Université de Toulon

en collaboration avec **M. Bravo** et **R. Cominetti**,
Universidad Adolfo Ibañez, Santiago, Chile

Séminaire Français d'Optimisation, 18/11/2021

Une famille de distances sur $\overline{\mathbb{N}}$

- $\overline{\mathbb{N}} \triangleq \mathbb{N} \cup \{-1\}$
- pour $n \in \mathbb{N}$, $\pi^n = (\pi_i^n)_{0 \le i \le n}$ probabilité sur $\{0, \ldots, n\}$
- pour $m, n \in \overline{\mathbb{N}}$:

$$d_{m,n} = \min \left\{ \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} z_{i,j} \, d_{i-1,j-1} \ : \ z \in \Pi(\pi^m, \pi^n) \right\}$$

où $z \in \Pi(\pi^m, \pi^n)$ si et seulement si $z = [0,1]^{m \times n}$ vérifie

$$\sum_{j=0}^{n} z_{i,j} = \pi_i^m \quad \text{pour tout } i = 0, \ldots, m;$$
$$\sum_{i=0}^{m} z_{i,j} = \pi_j^n \quad \text{pour tout } j = 0, \ldots, n.$$

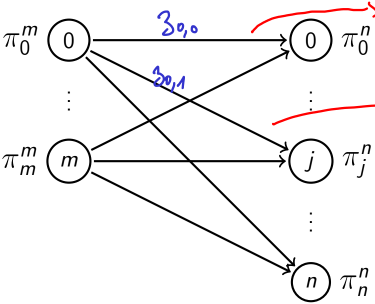
initialisation : $d_{-1,-1} = 0$, $d_{-1,j} = d_{j,-1} = 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}$

Une famille de distances sur $\overline{\mathbb{N}}$

$$d_{m,n} = \min \left\{ \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} z_{i,j}\, d_{i-1,j-1} \ : \ z \in \Pi(\pi^m, \pi^n) \right\}$$

avec $d_{-1,-1} = 0$, $d_{-1,j} = d_{j,-1} = 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}$

→ coût : $d_{-1,-1} = 0$

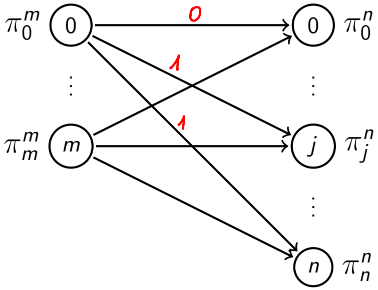


→ coût : $d_{-1,j-1} = 0$

Une famille de distances sur $\overline{\mathbb{N}}$

$$d_{m,n} = \min \left\{ \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} z_{i,j}\, d_{i-1,j-1} \ : \ z \in \Pi(\pi^m, \pi^n) \right\}$$

avec $d_{-1,-1} = 0$, $d_{-1,j} = d_{j,-1} = 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}$



$$\forall n, \quad d_{0,n} = 1 - \pi_0^n \quad \text{et} \quad d_{n,n} = 0 \quad \text{et} \quad \forall m, n \quad d_{m,n} = d_{n,m}$$

Lien avec des méthodes de point fixe

- C convexe borné de X, avec $(X, \|\cdot\|)$ normé
- $T : C \to C$ contractante : $\quad \forall x, y, \quad \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$
- $\exists x^* \in C, \quad Tx^* = x^*$
- $diam(C) = 1$

Méthode itérative de Krasnosel'skii-Mann

x^0, y^0 fixés dans C, par convention $Tx^{-1} = y^0$ et

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} \pi_i^n \, Tx^{i-1} \qquad \forall n \geq 1. \tag{KM}$$

Lien avec des méthodes de point fixe

x^0, y^0 fixés dans C, par convention $Tx^{-1} = y^0$ et

(KM) $$x^n = \sum_{i=0}^{n} \pi_i^n \, Tx^{i-1} \qquad \forall n \geq 1.$$

- itérations de Krasnosel'skii ('55): $\pi^n = (1-\alpha_n)\pi^{n-1} + \alpha_n \delta^n$

$x^0 = y^0$ $$x^n = (1-\alpha_n)x^{n-1} + \alpha_n Tx^{n-1}, \qquad \alpha_n \in (0,1)$$

- itérations de Halpern ('67): $\pi^n = (1-\beta_n)\delta^0 + \beta_n \delta^n$

$$x^n = (1-\beta_n)y^0 + \beta_n Tx^{n-1}, \qquad \beta_n \in (0,1),$$

- itérations d'Ishikawa ('74):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x^{2n+1} & = & (1-\beta_n)x^{2n} + \beta_n Tx^{2n} \\ x^{2n+2} & = & (1-\alpha_n)x^{2n} + \alpha_n Tx^{2n+1} \end{array} \right., \quad 0 \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq 1.$$

Lien avec des méthodes de point fixe

Proposition

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} \|x^m - x^n\| \leq d_{m,n} \\ \|x^n - Tx^n\| \leq R_n \triangleq \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \pi_i^n d_{i-1,n} \end{cases}$$

Lien avec des méthodes de point fixe

Proposition

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} \|x^m - x^n\| \leq d_{m,n} \\ \|x^n - Tx^n\| \leq R_n \triangleq \sum_{i=0}^{n} \pi_i^n d_{i-1,n} \end{cases}$$

en effet : soit z optimal pour $d_{m,n}$ alors

$$\begin{aligned} \|x^m - x^n\| &= \|\textstyle\sum_{i=0}^m \pi_i^m Tx^{i-1} - \sum_{j=0}^n \pi_j^n Tx^{j-1}\| \\ &= \|\textstyle\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n z_{i,j}(Tx^{i-1} - Tx^{j-1})\| \\ &\leq \textstyle\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n z_{i,j}\|Tx^{i-1} - Tx^{j-1}\| \\ &\leq \textstyle\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n z_{i,j} d_{i-1,j-1} \qquad \leq d_{m,n} \end{aligned}$$

Lien avec des méthodes de point fixe

Proposition

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} \|x^m - x^n\| \leq d_{m,n} \\ \|x^n - Tx^n\| \leq R_n \triangleq \sum_{i=0}^{n} \pi_i^n d_{i-1,n} \end{cases}$$

en effet : soit z optimal pour $d_{m,n}$ alors

$$\begin{aligned} \|x^m - x^n\| &= \|\textstyle\sum_{i=0}^m \pi_i^m Tx^{i-1} - \sum_{j=0}^n \pi_j^n Tx^{j-1}\| \\ &= \|\textstyle\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n z_{i,j}(Tx^{i-1} - Tx^{j-1})\| \\ &\leq \textstyle\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n z_{i,j}\|Tx^{i-1} - Tx^{j-1}\| \\ &\leq \textstyle\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n z_{i,j} d_{i-1,j-1} \end{aligned}$$

et

$$\|x^n - Tx^n\| = \|\textstyle\sum_{i=0}^n \pi_i^n(Tx^{i-1} - Tx^n)\| \leq \sum_{i=0}^n \pi_i^n d_{i-1,n}$$

Premières propriétés des $d_{m,n}$

$d_{-1,-1} = 0$

$d_{-1,n} = 1 \quad \forall n \geq 0$

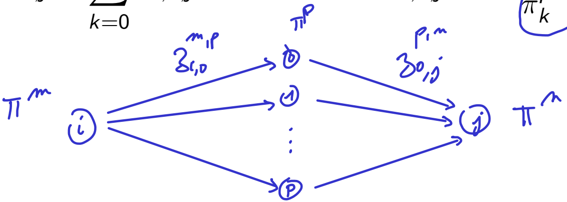
Théorème

Si $\pi^n \neq \pi^m$ pour tout $n \neq m$ alors :
$(m,n) \mapsto d_{m,n}$ est une distance sur $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{-1\}$.

$$\text{Rappel : } d_{m,n} = \min \left\{ \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} z_{i,j}\, d_{i-1,j-1} \ : \ z \in \Pi(\pi^m, \pi^n) \right\}$$

Pour $m, n, p \leq \ell$ on a : $\quad d_{m,n} \leq d_{m,p} + d_{p,n}$

$$\text{on pose : } \quad z_{i,j} = \sum_{k=0}^{p} \omega_{i,k,j} \quad \text{avec} \quad \omega_{i,k,j} = \frac{z^{m,p}_{i,k}\, z^{p,n}_{k,j}}{\pi^p_k}$$



Premières propriétés des $d_{m,n}$

$$
\begin{aligned}
d_{m,n} \leq & \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} z_{i,j} d_{i-1,j-1} \\
= & \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} \omega_{i,j,k} \underbrace{d_{i-1,j-1}} \\
\leq & \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} \omega_{i,j,k} (\overbrace{d_{i-1,k-1} + d_{k-1,j-1}}^{\text{Hyp. rec.}}) \\
= & \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{p} z_{i,k}^{m,p} d_{i-1,k-1} + \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} z_{k,j}^{p,n} d_{k-1,j-1} \\
= & d_{m,p} + d_{p,n}.
\end{aligned}
$$

Premières propriétés des $d_{m,n}$

On suppose $m \leq n$ $\quad$ $i \to i$: $d_{i-1,i-1} = 0$

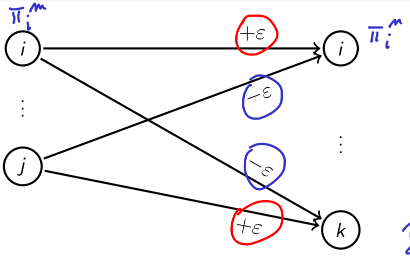
Définition

$z \in \Pi(\pi^m, \pi^n)$ est **simple** si $z_{i,i} = \min\{\pi_i^m, \pi_i^n\}$ pour tout i.

Proposition

$d_{m,n}$ admet un plan de transport optimal simple.

$z_{i,i} < \min\{\pi_i^m, \pi_i^n\}$



$z_{j,i} > 0$ $\quad$ $j \neq i$

$z_{i,k} > 0$ $\quad$ $i \neq k$

$$\varepsilon \times [\overbrace{d_{i-1,i-1}}^{0} + d_{j-1,k-1} - d_{j-1,i-1} - d_{i-1,k-1}] \leq 0$$

Dualité pour $d_{m,n}$

On suppose $m \leq n$

Formulation duale (Kantorovitch-Rubinstein)

$$d_{m,n} = \max_{u \in \mathbb{R}^{n+1}} \left\{ \sum_{j=0}^{n} (\pi_j^n - \pi_j^m)\, u_j \ : \ \forall i, j, \quad u_j - u_i \leq d_{i-1,j-1} \right\}.$$

$u : \{0, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$

Conditions de complémentarité :

$$z_{i,j}^{mn}(u_j^{mn} - u_i^{mn}) = z_{ij}^{mn} d_{i-1,j-1} \qquad \text{pour tous } i, j.$$

extension de u : $\qquad \forall i > n, \quad u_i \triangleq \min_{0 \leq k \leq n} u_k + d_{k-1,i-1}$

$\longrightarrow$ on peut supposer $u_i \in [0, 1]$ pour tout i.

Exactitude des bornes

Théorème

Soit $\mathcal{I} \triangleq \{(m,n)\ :\ 0 \leq m \leq n\}$, $C = [0,1]^{\mathcal{I}}$ *dans* $(\ell^\infty(\mathcal{I}), \|\cdot\|_\infty)$.
Alors pour toute suite $(\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *il existe* $T : C \to C$ *et une suite* (KM) *associée telle que*

$$\forall m,n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} \|x^m - x^n\| = d_{m,n} \\ \|x^n - Tx^n\| = R_n \triangleq \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \pi_i^n d_{i-1,n} \end{cases}$$

Baillon-Bruck ('92), Bravo-Cominetti ('18),
Bravo-C.-Cominetti ('21), Contreras-Cominetti ('21)

(H) $\qquad (\forall n \geq 1) \quad \pi_n^n > 0 \quad$ et $\quad 0 \leq \pi_i^n \leq \pi_i^{n-1}$ pour $i < n$.

$$\begin{array}{llcl} \pi^{n-1} & 0 & \geq & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ & n-1 & \geq & n-1 \\ & & & n \quad \pi_n^n > 0 \end{array}$$

Exactitude des bornes

Théorème

Soit $\mathcal{I} \triangleq \{(m,n) \ : \ 0 \le m \le n\}$, $C = [0,1]^{\mathcal{I}}$ *dans* $(\ell^\infty(\mathcal{I}), \|\cdot\|_\infty)$. *Alors pour toute suite* $(\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *il existe* $T : C \to C$ *et une suite* (KM) *associée telle que*

$$\forall m,n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} \|x^m - x^n\| = d_{m,n} \\ \|x^n - Tx^n\| = R_n \triangleq \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \pi_i^n d_{i-1,n} \end{cases}$$

Ebauche de preuve : pour $k \ge -1$ on définit $y^k \in C = [0,1]^{\mathcal{I}}$ par

$$\begin{cases} y^k_{m,n} = u^{mn}_{k+1} \qquad \forall (m,n) \in \mathcal{I}, \\ x^k = \sum_{i=0}^{k} \pi_i^k y^{i-1} \end{cases}$$

u^{mn} -> optimal pour $d_{m,n}$

On montre que $T : x^k \mapsto y^k$ pour tout k convient.

Application aux itérations de Krasnosel'skii

Itérations de Krasnosel'skii :

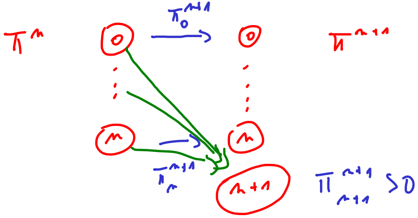
$$x^n = (1-\alpha_n)x^{n-1} + \alpha_n T x^{n-1}, \qquad \alpha_n \in (0,1)$$

ici $\pi^n = (1-\alpha_n)\pi^{n-1} + \alpha_n \delta^n$, donc

$$(\mathrm{H}) \qquad (\forall n \geq 1) \quad \pi_n^n > 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq \pi_i^n \leq \pi_i^{n-1} \text{ pour } i < n.$$

d'où

$$d_{n,n+1} = \sum_{i=0}^{n} (\pi_i^n - \pi_i^{n+1}) d_{i-1,n} = \alpha_{n+1} \sum_{i=0}^{n} \pi_i^n d_{i-1,n} = \alpha_{n+1} R_n$$



Application aux itérations de Krasnosel'skii

On a alors

$$\|x^n - Tx^n\| \leq R_n = \frac{d_{n,n+1}}{\alpha_{n+1}} \leq \frac{\mathrm{diam}(C)}{\sqrt{\pi \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (1-\alpha_k)}}$$

Cominetti-Soto-Vaisman ('14), Baillon-Bruck ('96), Bravo-Cominetti ('18).

En particulier pour $\alpha_k \equiv \alpha$: $\qquad R_n \sim O(1/\sqrt{n})$.

Application aux itérations de Halpern

Itérations de Halpern (67):

$$x^n = (1-\beta_n)y^0 + \beta_n T x^{n-1}, \qquad \beta_n \in (0,1),$$

ici $\pi_0^n = 1 - \beta_n$ et $\pi_n^n = \beta_n$

donc

$$R_n = \sum_{i=0}^{n} \pi_i^n d_{i-1,n} = (1-\beta_n) + \beta_n d_{n-1,n}.$$

Application aux itérations de Halpern

Itérations de Halpern (67):

$$x^n = (1-\beta_n)y^0 + \beta_n T x^{n-1}, \qquad \beta_n \in (0,1),$$

ici $\pi_0^n = 1 - \beta_n$ et $\pi_n^n = \beta_n$
donc

$$R_n = \sum_{i=0}^{n} \pi_i^n d_{i-1,n} = (1 - \beta_n) + \beta_n d_{n-1,n}.$$

De plus $(\mathrm{H}) \Leftrightarrow (\beta_n)_n$ décroissante

et dans ce cas :

$$R_n = \sum_{i=0}^{n} (1 - \beta_i)^2 B_{i+1}^n$$

où $\beta_0 = 0$, $B_{n+1}^n = 1$ et $B_i^n = \prod_{k=i}^n \beta_k$.

Application aux itérations de Halpern

Itérations de Halpern (67):

$$x^n = (1-\beta_n)y^0 + \beta_n T x^{n-1}, \qquad \beta_n \in (0,1),$$

ici $\pi_0^n = 1 - \beta_n$ et $\pi_n^n = \beta_n$
donc

$$R_n = \sum_{i=0}^{n} \pi_i^n d_{i-1,n} = (1-\beta_n) + \beta_n d_{n-1,n}.$$

De plus $\quad (\mathrm{H}) \;\Leftrightarrow\; (\beta_n)_n$ décroissante

et dans ce cas :

$$R_n = \textstyle\sum_{i=0}^n (1-\beta_i)^2 B_{i+1}^n$$

où $\beta_0 = 0, \quad B_{n+1}^n = 1$ et $B_i^n = \prod_{k=i}^n \beta_k$.

pour $\beta_n = \dfrac{n}{n+1}$ on a :

$$\|x^n - Tx^n\| \leq R_n = \frac{H_{n+1}}{n+1} \sim O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Application aux itérations de Halpern

Itérations de Halpern (67):

$$x^n = (1-\beta_n)y^0 + \beta_n T x^{n-1}, \qquad \beta_n \in (0,1),$$

ici $\pi_0^n = 1 - \beta_n$ et $\pi_n^n = \beta_n$
donc

$$R_n = \sum_{i=0}^{n} \pi_i^n d_{i-1,n} = (1-\beta_n) + \beta_n d_{n-1,n}.$$

De plus $(\mathrm{H}) \Leftrightarrow (\beta_n)_n$ décroissante

et dans ce cas :

$$R_n = \textstyle\sum_{i=0}^{n}(1-\beta_i)^2 B_{i+1}^n$$

où $\beta_0 = 0,\quad B_{n+1}^n = 1$ et $B_i^n = \prod_{k=i}^n \beta_k$.

pour $\beta_n = \dfrac{n}{n+2}$ on a :

$$\|x^n - Tx^n\| \leq R_n = \frac{4}{n+1}\left(1 - \frac{H_{n+2}}{n+2}\right) \sim O\left(\frac{1}{n}\right)$$

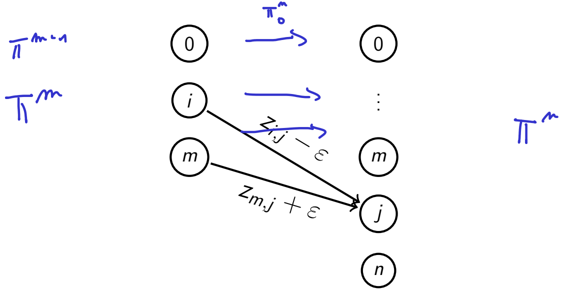
Monotonie de $d_{m,n}$

Théorème (Monotonie)

On suppose (H). *Alors pour $m \leq n$ on a*

- *$d_{m,n}$ est décroissante en m*
- *$d_{m,n}$ est croissante en n.*

Preuve de $d_{m,n} \leq d_{m-1,n}$, en partant de z optimal pour $d_{m-1,n}$:



Monotonie de $d_{m,n}$

$\pi_i^n \leq \pi_i^{n+1} \quad \forall i \{0,\dots,n\}$

Pour (H) remplacée par

$$\sum_{i \geq k} \pi_i^n \leq \sum_{i \geq k} \pi_i^{n+1} \qquad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}$$

on a le contre-exemple

$$\begin{aligned}
\pi^0 &= (1, 0, 0, 0, \dots) \\
\pi^1 &= (\tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{5}, 0, 0, \dots) \\
\pi^2 &= (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, 0, 0, \dots) \\
\pi^3 &= (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{4}, 0, 0, \dots) \\
\pi^4 &= (0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{4}, 0, 0, \dots) \\
\pi^5 &= (0, 0, \tfrac{1}{2}, 0, 0, \tfrac{1}{2}, 0, 0, \dots)
\end{aligned}$$

pour lequel $d_{3,5} = \frac{22}{40}$ et $d_{4,5} = \frac{23}{40}$.

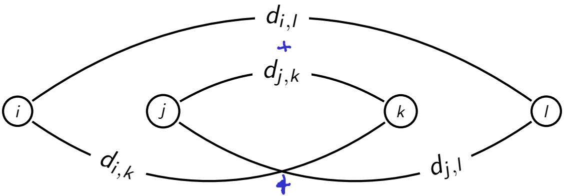
Inégalité de convexité quadrangulaire

Théorème (Inégalité de convexité quadrangulaire)

On suppose (H)*. Alors*

(Q) $\qquad d_{i,l} + d_{j,k} \leq d_{i,k} + d_{j,l} \qquad$ *pour tout* $i \leq j \leq k \leq l$.

Graphiquement :



Inégalité de convexité quadrangulaire

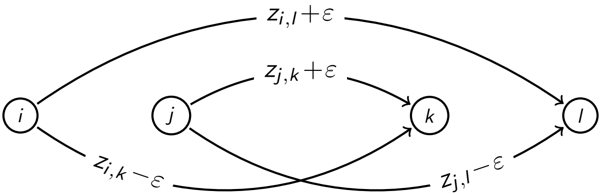
Définition

Un plan de transport z est **imbriqué** si

$$i < j < k < l \quad \Rightarrow \quad z_{i,k} = 0 \quad \text{ou} \quad z_{j,l} = 0$$

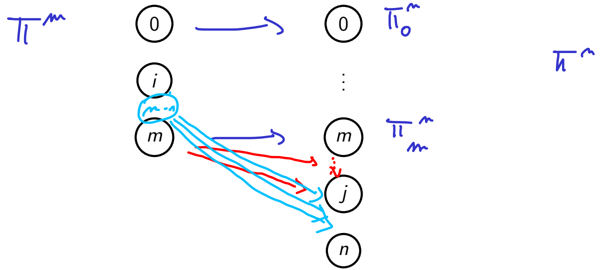
Proposition

On suppose (Q)*, alors chaque* $d_{m,n}$ *admet un trasnport* simple et imbriqué *pour* $m \leq n$*.*



Inégalité de convexité quadrangulaire

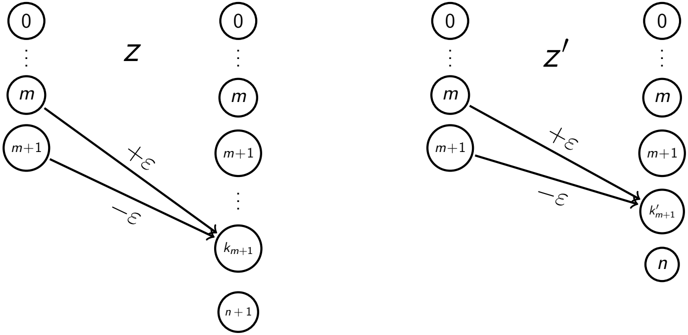
Soit $m \leq n$, on construit z^{mn} simple et imbriqué :



Inégalité de convexité quadrangulaire

On montre par récurrence sur n puis m que pour $m+1 \leq n$:

$$d_{m,n+1} - d_{m,n} \quad \leq \quad d_{m+1,n+1} - d_{m+1,n}$$



Quelques exemples

- Cas $\pi^n = \delta^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_{m,n} = 1_{m \neq n}$ sur $\overline{\mathbb{N}}$.
- Cas $\pi^n = (1-\alpha)\delta^{n-1} + \alpha\delta^n$ avec $\alpha \geq \frac{1}{2}$. → pour (H)
  Par exemple on obtient $\{d_{7,n}(\alpha)\}_{0 \leq n \leq 17}$:

n=0 → 1

1

1

n=3 → $4\alpha - 6\alpha^2 + 4\alpha^3 - \alpha^4$

$-3 + 30\alpha - 90\alpha^2 + 130\alpha^3 - 90\alpha^4 + 24\alpha^5$

$4 - 10\alpha - 35\alpha^2 + 200\alpha^3 - 350\alpha^4 + 272\alpha^5 - 80\alpha^6$

$4 - 43\alpha + 178\alpha^2 - 340\alpha^3 + 280\alpha^4 + 2\alpha^5 - 144\alpha^6 + 64\alpha^7$

n=7 → 0

$37\alpha - 289\alpha^2 + 931\alpha^3 - 1510\alpha^4 + 1180\alpha^5 - 204\alpha^6 - 272\alpha^7 + 128\alpha^8$

$18 - 194\alpha + 821\alpha^2 - 1636\alpha^3 + 1255\alpha^4 + 814\alpha^5 - 2357\alpha^6 + 1728\alpha^7 - 448\alpha^8$

$-20 + 147\alpha - 252\alpha^2 - 686\alpha^3 + 3675\alpha^4 - 6825\alpha^5 + 6566\alpha^6 - 3276\alpha^7 + 672\alpha^8$

$-1 + 112\alpha - 952\alpha^2 + 3640\alpha^3 - 7770\alpha^4 + 9912\alpha^5 - 7532\alpha^6 + 3152\alpha^7 - 560\alpha^8$

$20 - 245\alpha + 1295\alpha^2 - 3745\alpha^3 + 6545\alpha^4 - 7119\alpha^5 + 4725\alpha^6 - 1755\alpha^7 + 280\alpha^8$

$-15 + 168\alpha - 756\alpha^2 + 1904\alpha^3 - 2940\alpha^4 + 2856\alpha^5 - 1708\alpha^6 + 576\alpha^7 - 84\alpha^8$

$7 - 56\alpha + 224\alpha^2 - 504\alpha^3 + 700\alpha^4 - 616\alpha^5 + 336\alpha^6 - 104\alpha^7 + 14\alpha^8$

$8\alpha - 28\alpha^2 + 56\alpha^3 - 70\alpha^4 + 56\alpha^5 - 28\alpha^6 + 8\alpha^7 - \alpha^8$

n=16 → 1

1

Quelques exemples

- Cas uniforme : $\pi_i^n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $0 \leq i \leq n$

  On remarque qu'alors : $\pi_i^n = (1-\alpha_n)\pi^{n-1} + \alpha_n \delta^n$
  avec $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$.

  Dans ce cas on a :

$$R_n = \frac{d_{n,n+1}}{\alpha_{n+1}} \leq \frac{\mathrm{diam}(C)}{\sqrt{\pi \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (1-\alpha_k)}} \sim O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right).$$

Bibliographie

- Aygen-Satik, Y.; *Optimal Bounds of Asymptotic Regularity*, Ph.D. Thesis, University of Southern California, (1994).
- Baillon, J.B.; Bruck, R.E.; *Optimal rates of asymptotic regularity for averaged non-expansive mappings*, In: Proceedings of the Second International Conference on Fixed Point Theory and Applications (K.K. Tan, ed.), World Scientific Press, London, pp. 27-66, (1992).
- Baillon, J.B.; Bruck, R.E.; *The rate of asymptotic regularity is* $O(1/\sqrt{n})$, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 178:51-81, (1996).
- Bravo, M.; Cominetti, R.; *Sharp convergence rates for averaged non-expansive maps*, Israel Journal of Mathematics 17(1):163-188, (2018).

Bibliographie

- Bravo, M.; Champion, T.; Cominetti, R.; *Universal bounds for fixed point iterations via optimal transport metrics*, arXiv:2108.00300v1, 1-21, 2021.
- Cominetti, R.; Soto, J.; Vaisman, J.; *On the rate of convergence of Krasnosel'skiĭ-Mann iterations and their connection with sums of Bernoullis*, Israel J. Math. 199(2), 757-772, (2014).
- Contreras, J.P.; Cominetti, R.; *Optimizing error bounds for nonexpansive fixed point iterations in normed spaces*, arXiv:2108.10969 1-29, 2021.
- Halpern, B.; *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. 73(6):957-961, (1967).
- Ishikawa, S.; *Fixed points by a new iteration method*. Proc. Amer. Math. Soc. 44:147-150, (1974).

Bibliographie

- Krasnosel'skii, M.A.; *Two remarks on the method of successive approximations*, Uspekhi Mat. Nauk 10:1(63):123-127, (1955).
- Lieder, F.; *On the convergence rate of the Halpern-iteration*, Optimization Letters 15:405-418 (2021).
- Mann, W.R.; *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. 4(3):506-510, (1953).